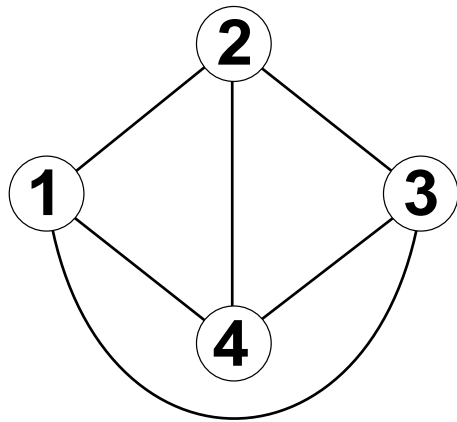


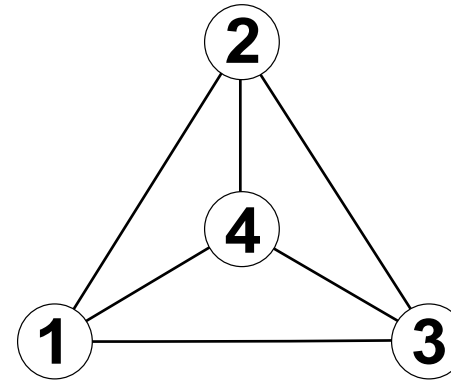
Überblick

- Geradlinige Zeichnungen
 - Kanonische Ordnungen + Shift-Algorithmus
-
- Erweiterungen durch Ohrendekompositionen
 - Mondshein-Sequenz + Anwendungen

Geradlinige Zeichnungen

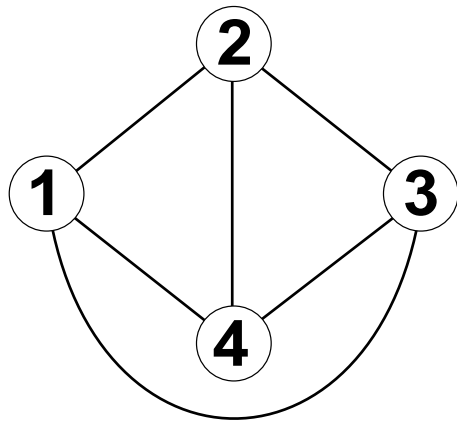


planare Einbettung



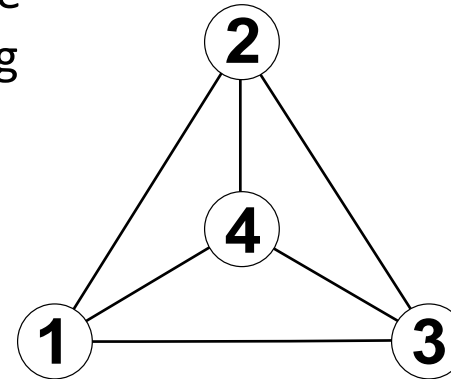
geradlinige Zeichnung

Geradlinige Zeichnungen



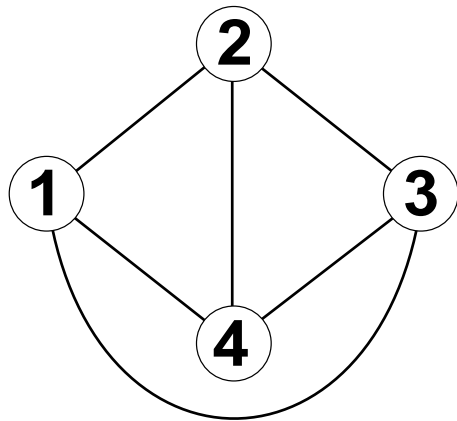
planare Einbettung

Wie kann man eine
planare Einbettung
zeichnen?



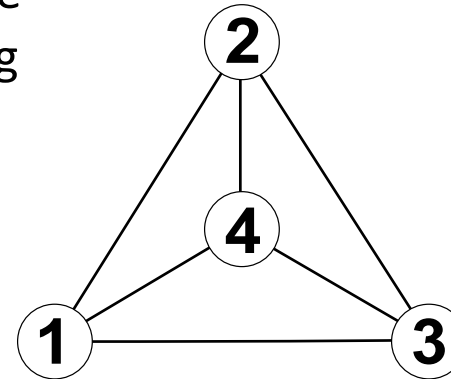
geradlinige Zeichnung

Geradlinige Zeichnungen



planare Einbettung

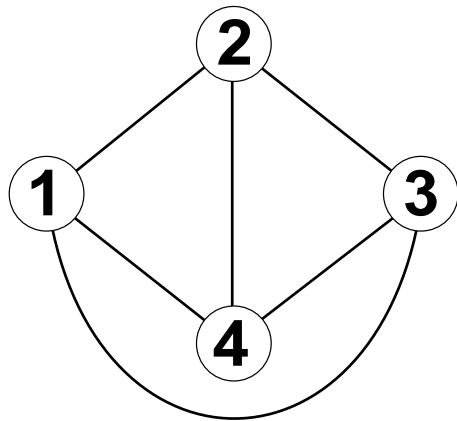
Wie kann man eine
planare Einbettung
zeichnen?



geradlinige Zeichnung

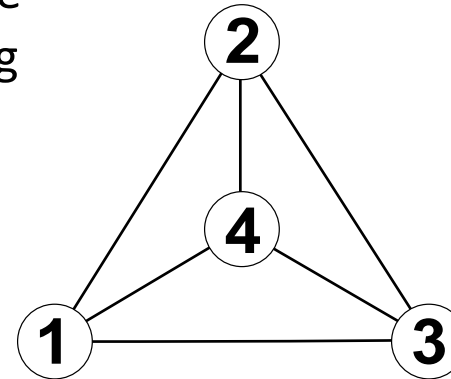
Thm [Steinitz & Rademacher '34, Wagner '36, Fary '48, Stein '51]:
Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung.

Geradlinige Zeichnungen



planare Einbettung

Wie kann man eine
planare Einbettung
zeichnen?

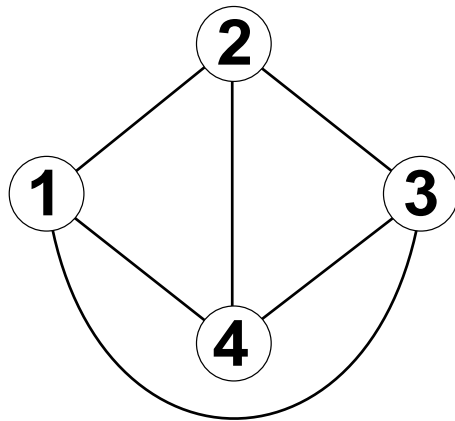


geradlinige Zeichnung

Thm [Steinitz & Rademacher '34, Wagner '36, Fary '48, Stein '51]:
Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung.

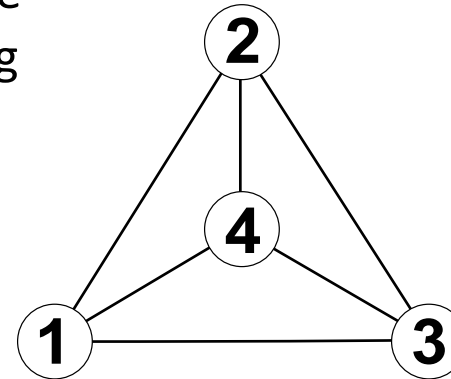
- **Aber:** Fläche der Zeichnung in Beweisen ist nicht polynomiell durch n beschränkt!

Geradlinige Zeichnungen



planare Einbettung

Wie kann man eine
planare Einbettung
zeichnen?



geradlinige Zeichnung

Thm [Steinitz & Rademacher '34, Wagner '36, Fary '48, Stein '51]:
Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung.

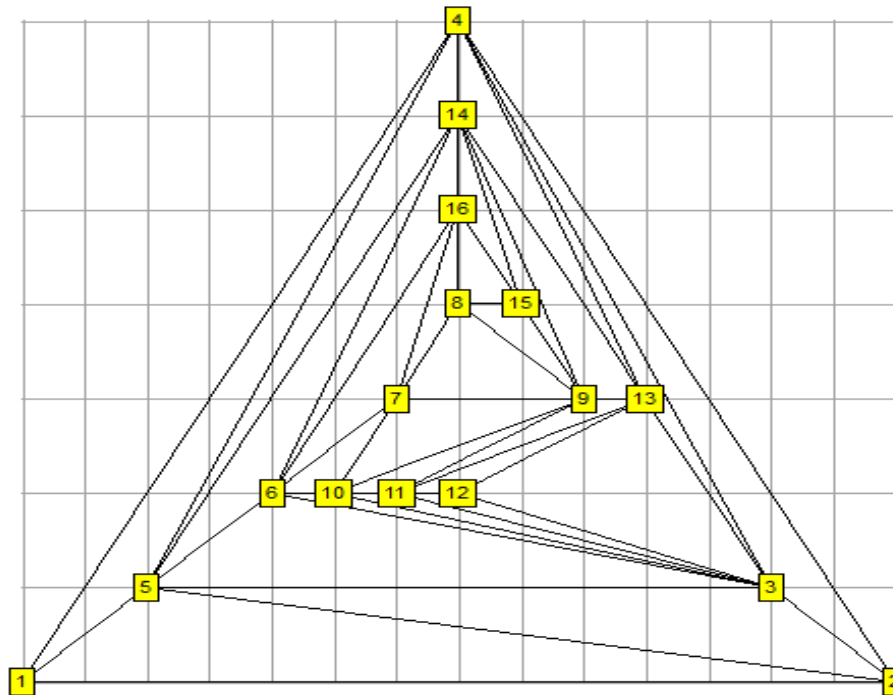
- **Aber:** Fläche der Zeichnung in Beweisen ist nicht polynomiell durch n beschränkt!
- **Aber:** Beweise liefern kein effizientes Verfahren, um Zeichnung zu finden (geometrische Argumente \rightarrow high precision arithmetic).

Geradlinige Zeichnungen

Thm [de Fraysseix, Pach, Pollack '88]: Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung auf einem $(2n-4) \times (n-2)$ -Gitter. Effizient!

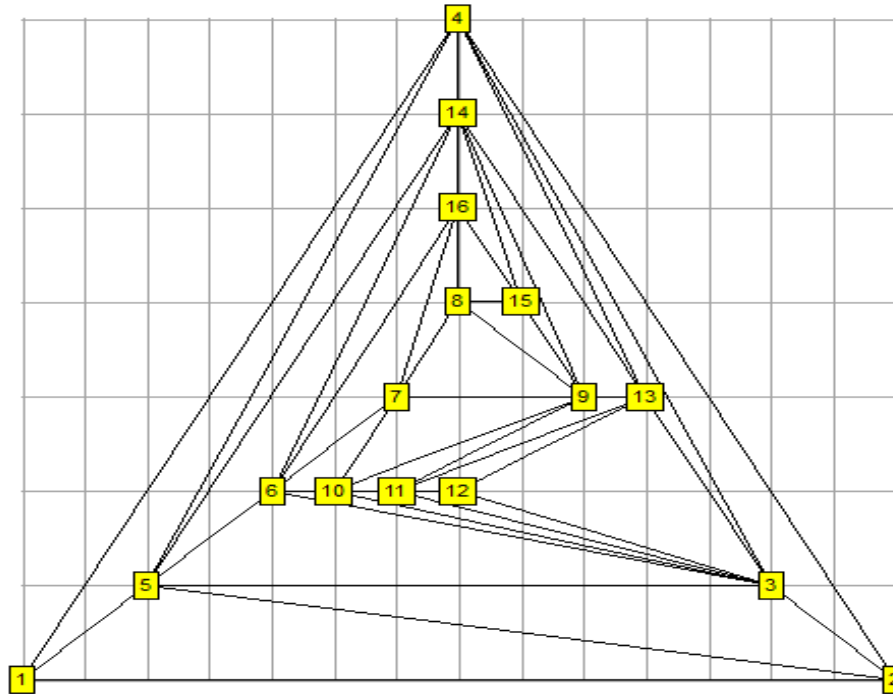
Geradlinige Zeichnungen

Thm [de Fraysseix, Pach, Pollack '88]: Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung auf einem $(2n-4) \times (n-2)$ -Gitter. Effizient!



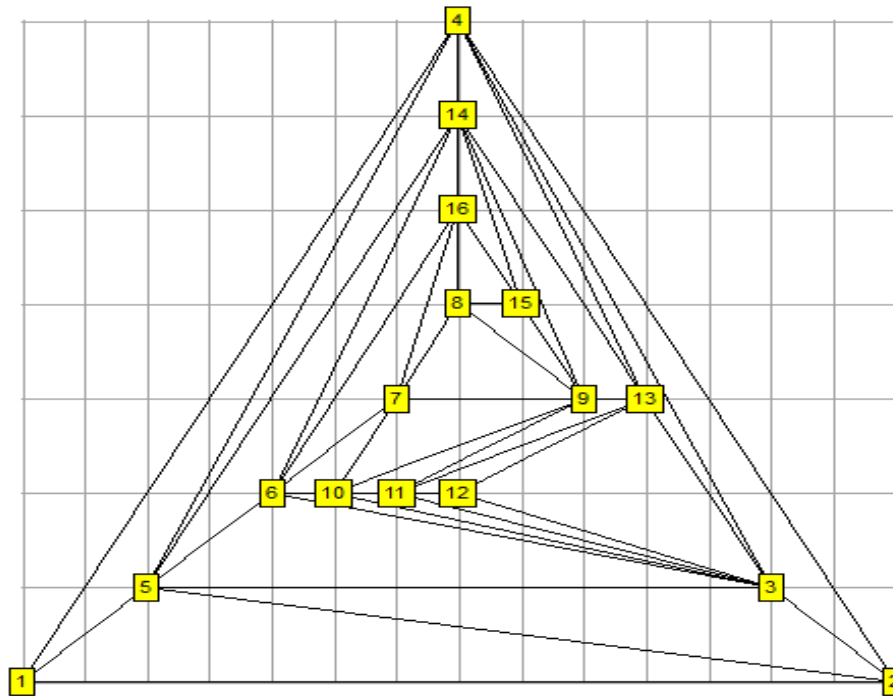
Geradlinige Zeichnungen

Thm [de Fraysseix, Pach, Pollack '88]: Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung auf einem $(2n-4) \times (n-2)$ -Gitter. Effizient! ← hier



Geradlinige Zeichnungen

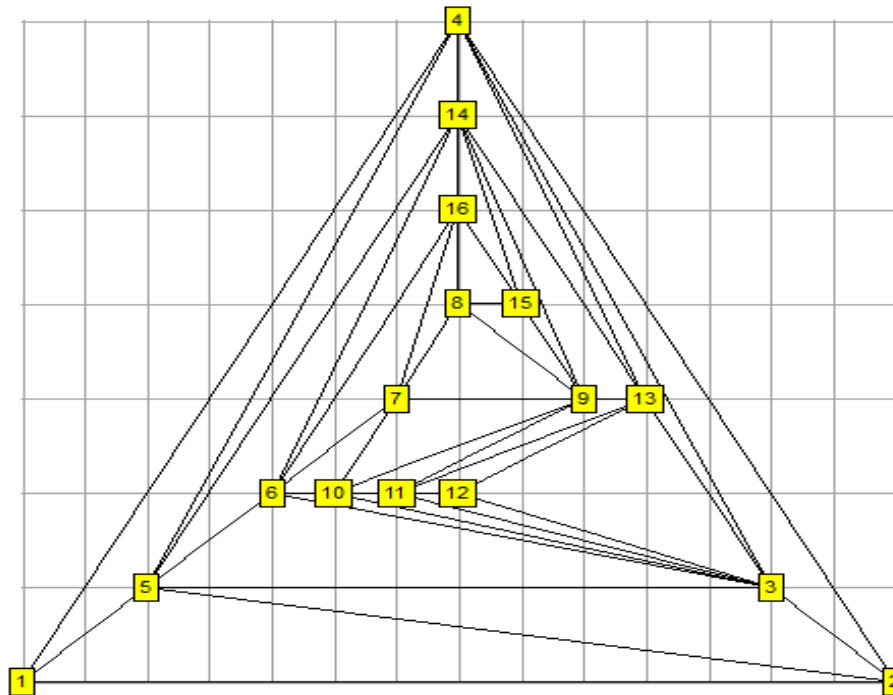
Thm [de Fraysseix, Pach, Pollack '88]: Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung auf einem $(2n-4) \times (n-2)$ -Gitter. Effizient! ← hier



Thm [Schnyder '90]: Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung auf einem $(n-2) \times (n-2)$ -Gitter.

Geradlinige Zeichnungen

Thm [de Fraysseix, Pach, Pollack '88]: Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung auf einem $(2n-4) \times (n-2)$ -Gitter. Effizient! ← hier

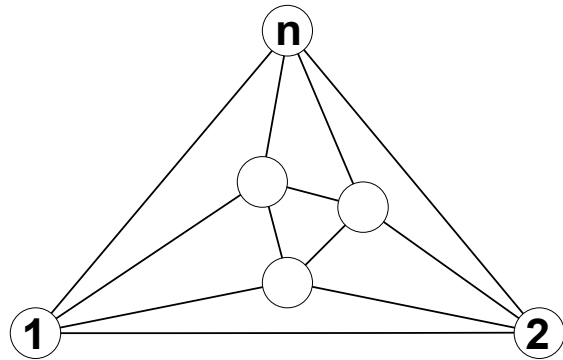


Thm [Schnyder '90]: Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung auf einem $(n-2) \times (n-2)$ -Gitter.

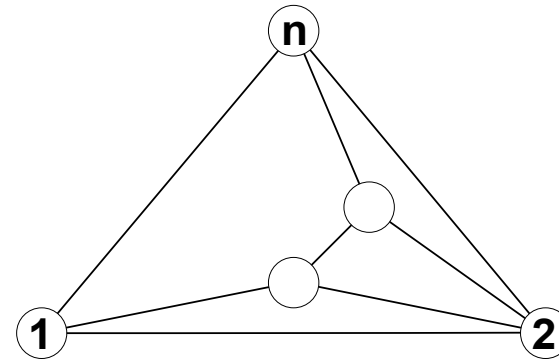
Thm [Brandenburg '08]: Jeder planare Graph hat eine geradlinige Zeichnung auf einem $(4n/3) \times (2n/3)$ -Gitter.

Eingabegraph

Triangulation = planare Einbettung, in der jede **innere** Fläche ein Dreieck ist



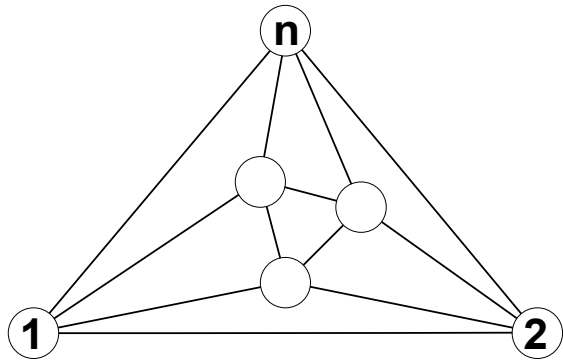
z.B. maximal planar



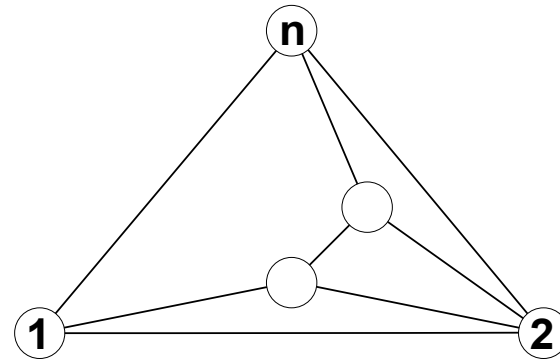
wenn nicht maximal planar:
füge Kanten in Flächen ein

Eingabegraph

Triangulation = planare Einbettung, in der jede **innere** Fläche ein Dreieck ist



z.B. maximal planar



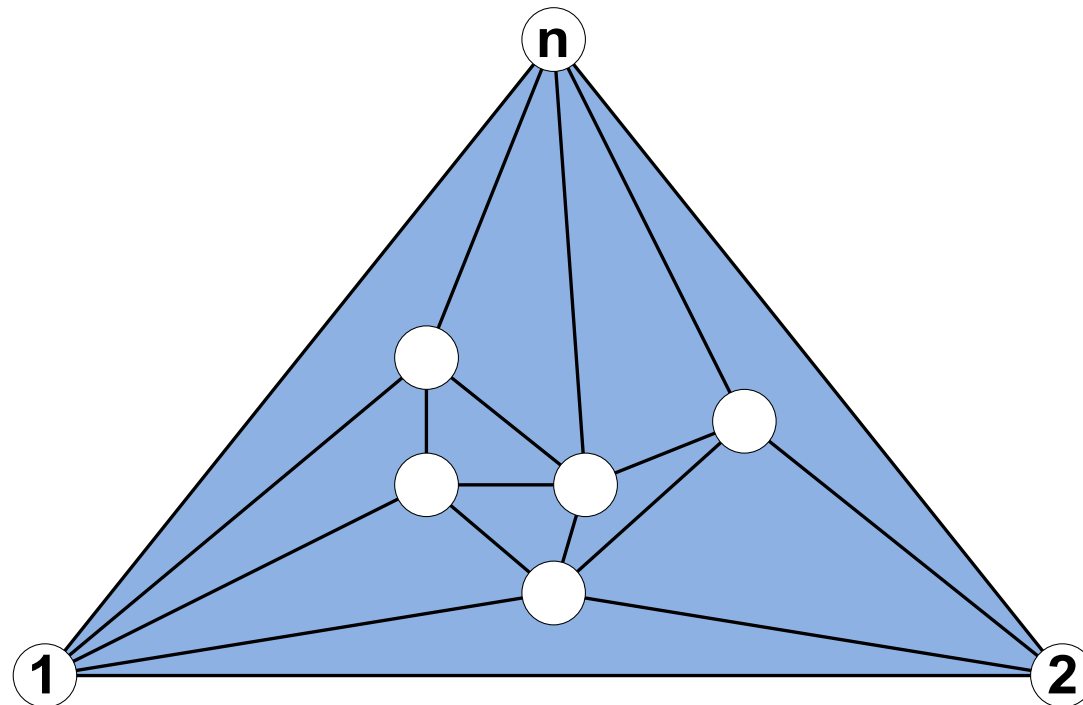
wenn nicht maximal planar:
füge Kanten in Flächen ein

Annahme: $G=(V,E)$ maximal planar mit äußeren Knoten 1,2,n.

Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

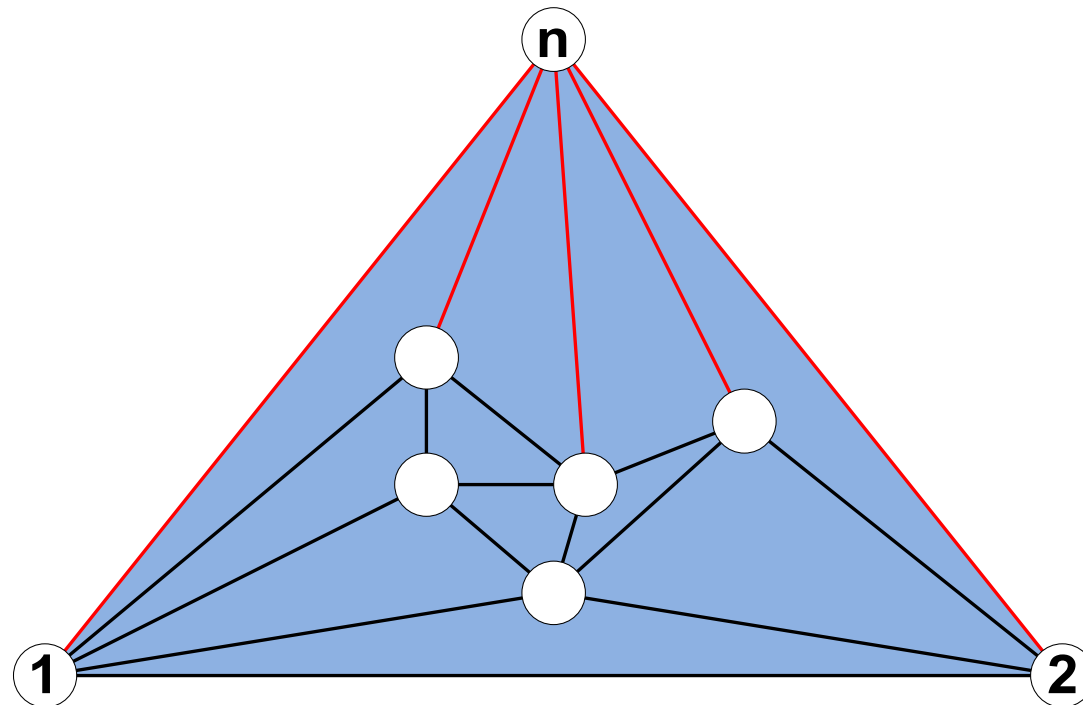
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

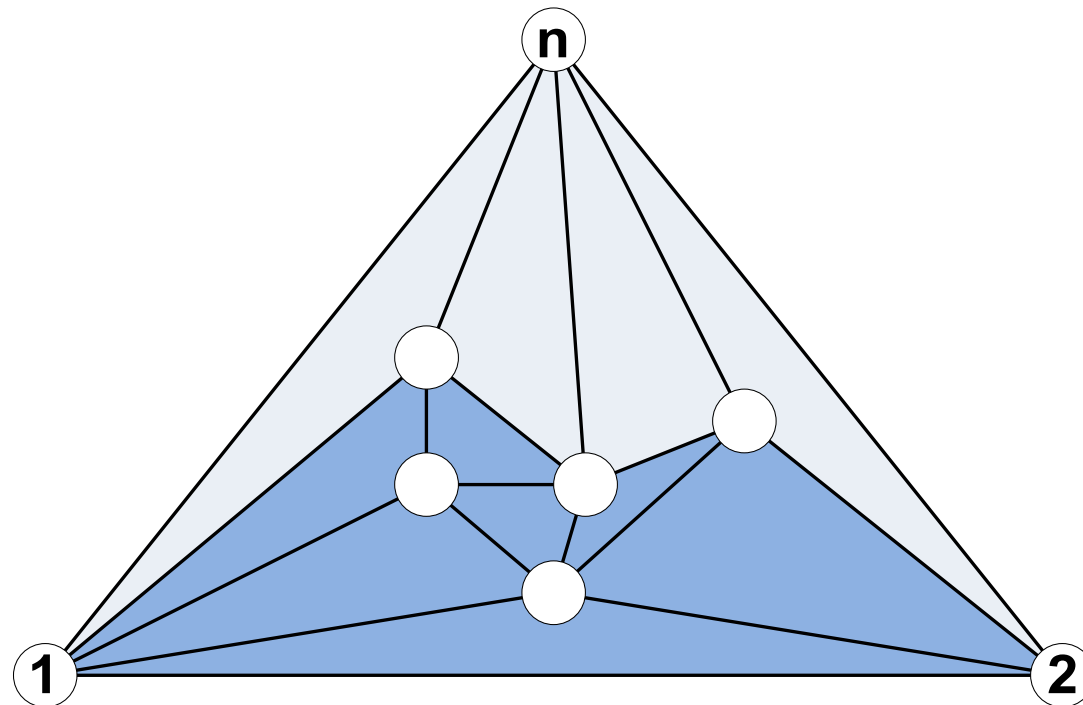
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

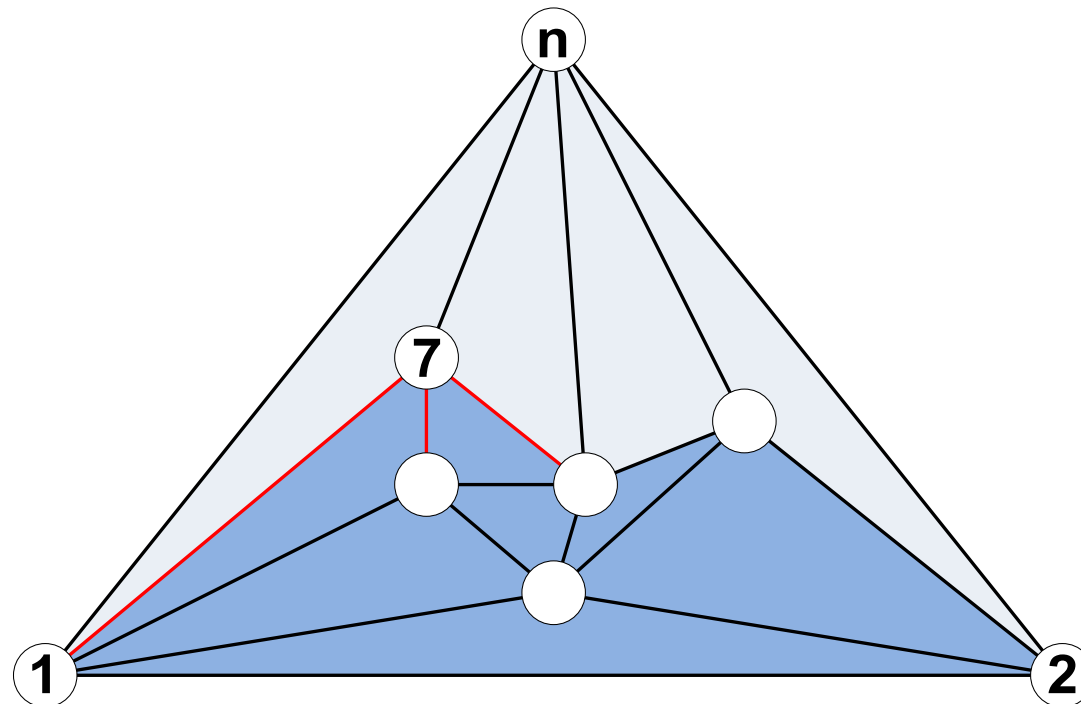
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

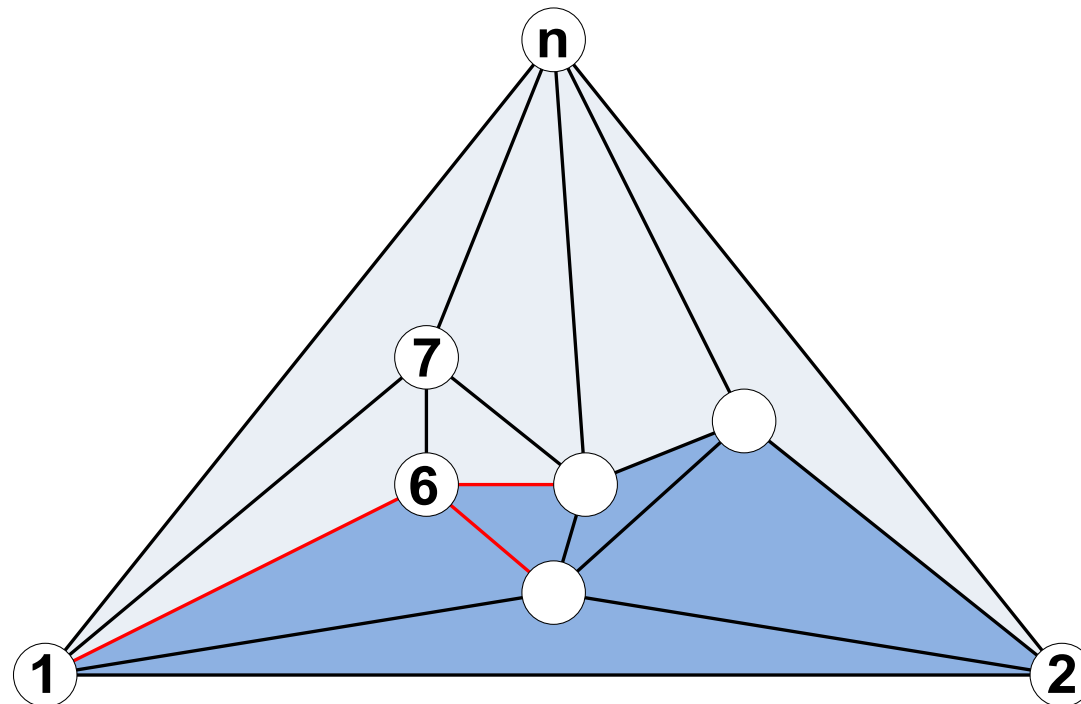
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

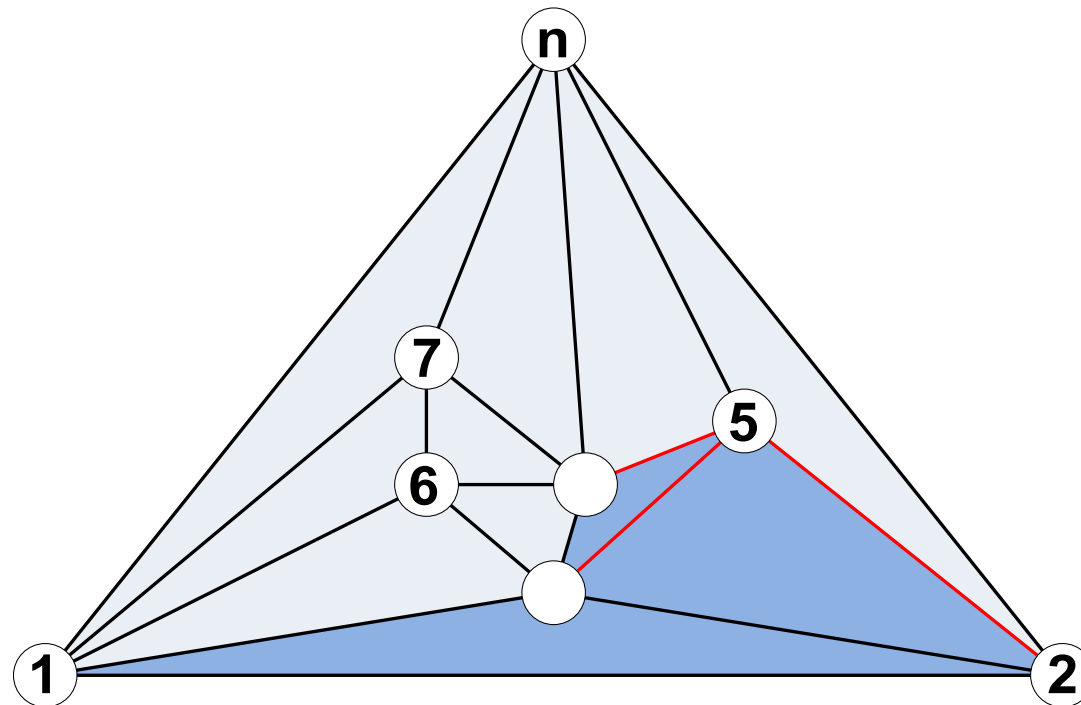
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

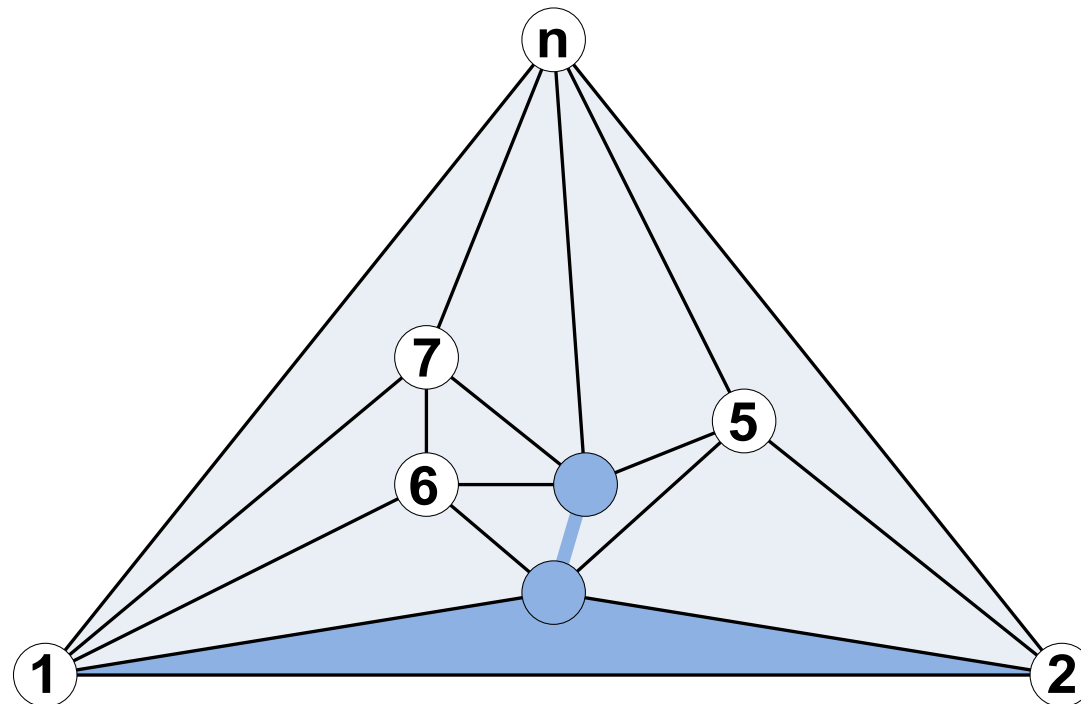
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

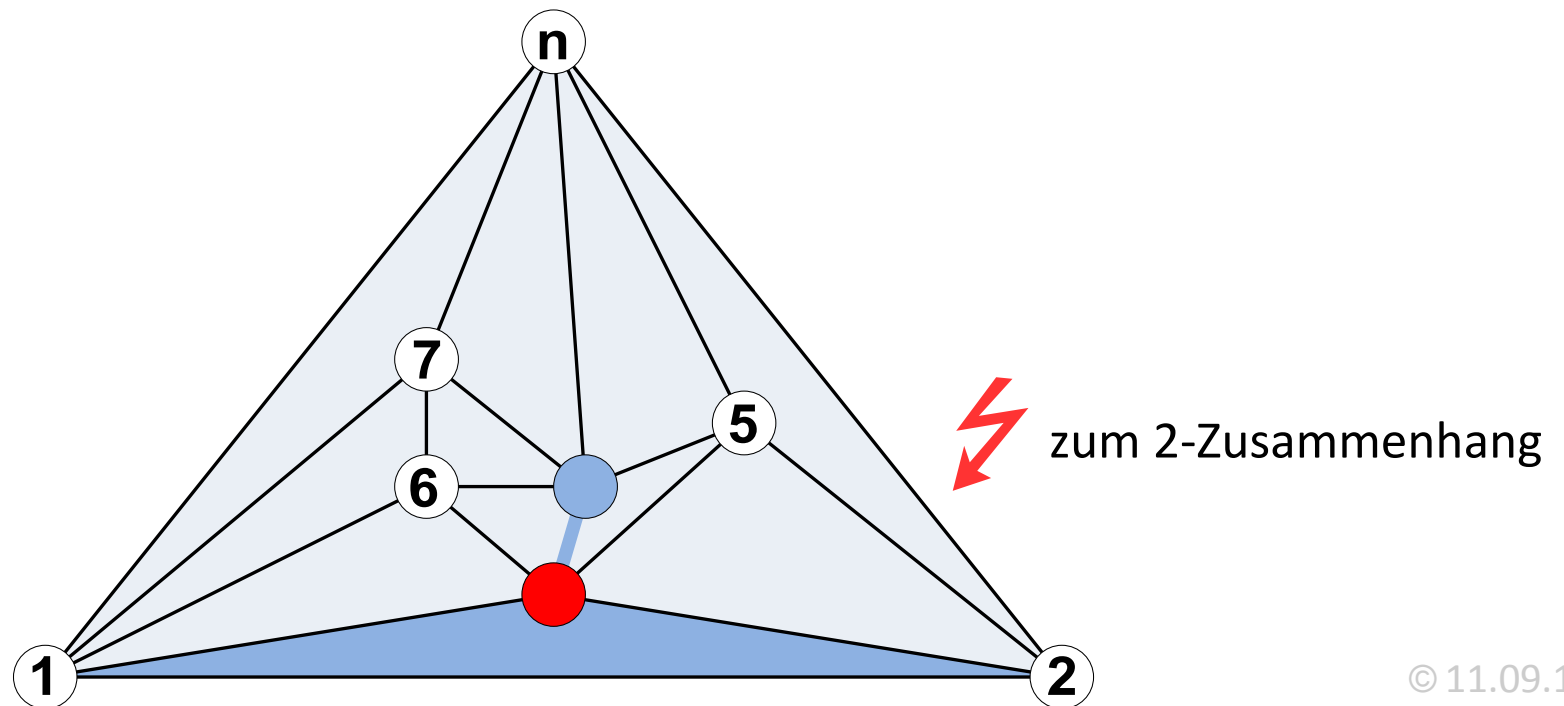
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

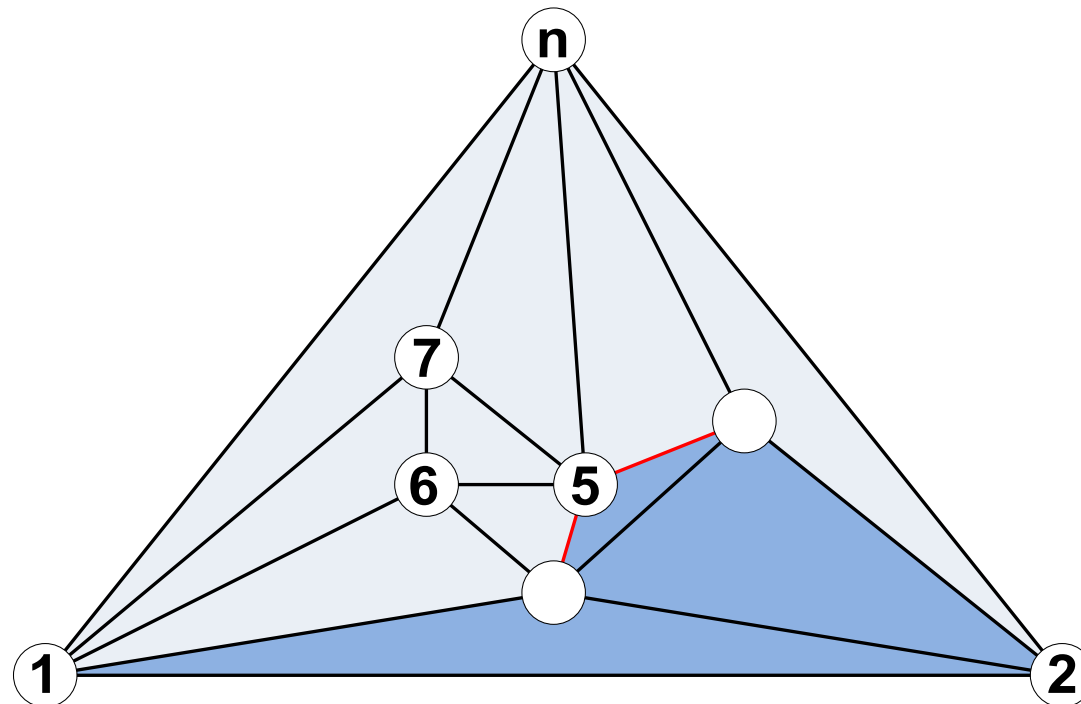
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

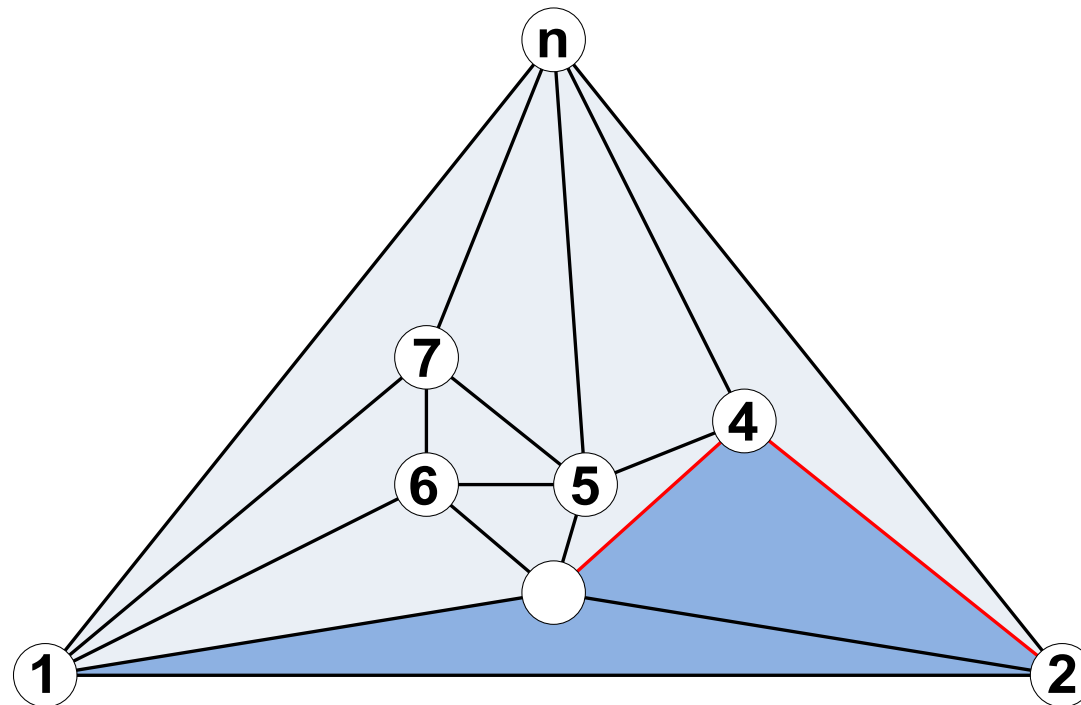
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

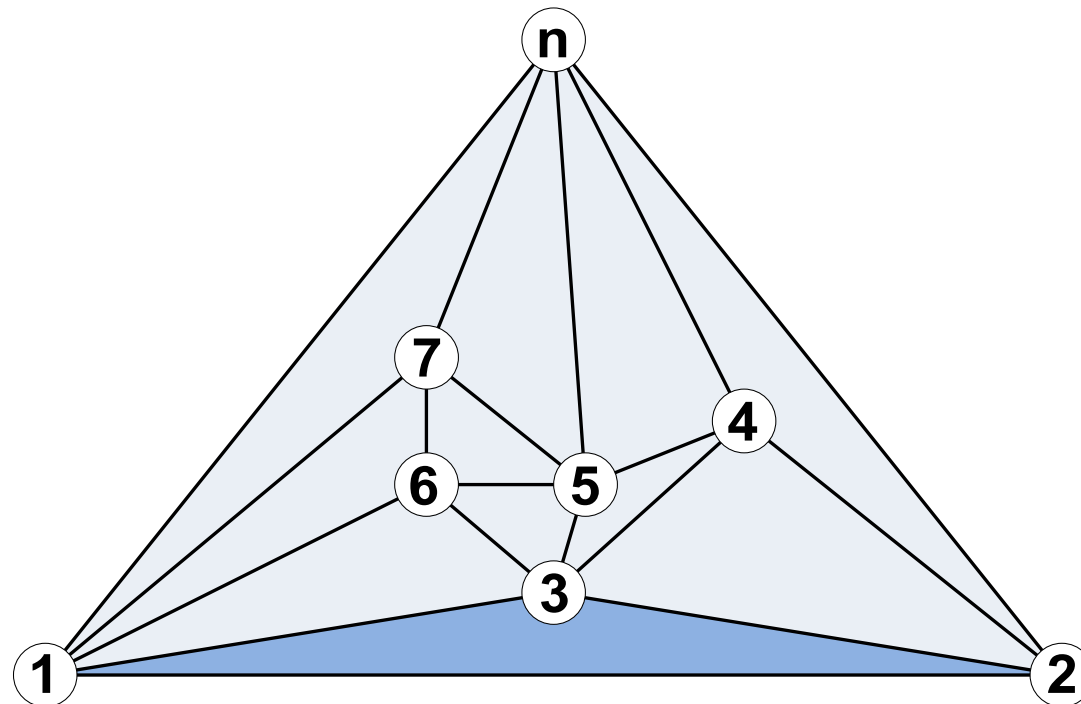
- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Kanonische Ordnung

Def.: Eine *kanonische Ordnung* von G ist eine Totalordnung $1, \dots, n$ der Knoten, so dass für jedes $i \geq 4$ gilt:

- Knoten $1, \dots, i-1$ induzieren eine 2-zusammenhängende Triangulation G_{i-1}
- Kante $(1,2)$ liegt auf Außenfläche von G_{i-1} ; Knoten i außerhalb davon
- Nachbarn von i in G_{i-1} sind konsekutiv auf Außenfläche von G_{i-1}



Existenz

Lemma: G hat eine kanonische Ordnung.

Existenz

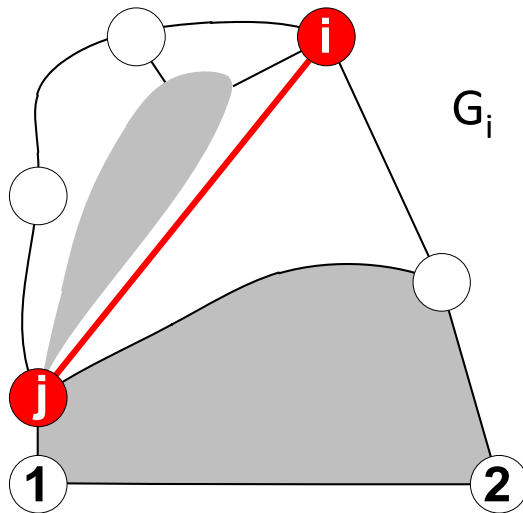
Lemma: G hat eine kanonische Ordnung.

- Notwendig: i nicht inzident zu einer Sehne der Außenfläche von G_i

Existenz

Lemma: G hat eine kanonische Ordnung.

- Notwendig: i nicht inzident zu einer Sehne der Außenfläche von G_i

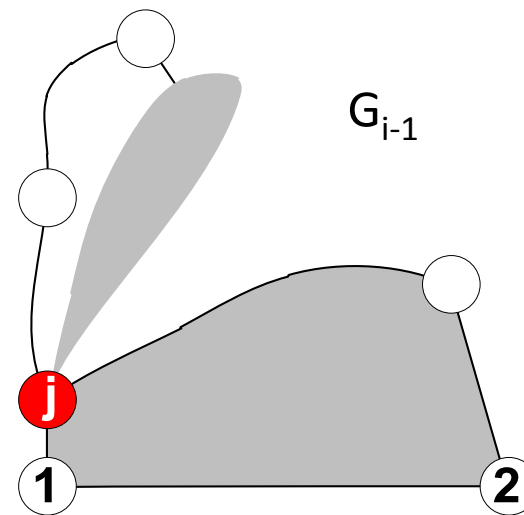
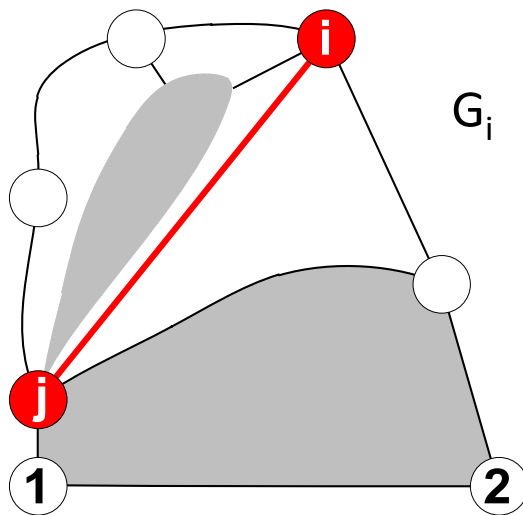


Sehne (i,j) der Außenfläche: 2-Separator

Existenz

Lemma: G hat eine kanonische Ordnung.

- Notwendig: i nicht inzident zu einer Sehne der Außenfläche von G_i



Sehne (i,j) der Außenfläche: 2-Separator

1-Separator j

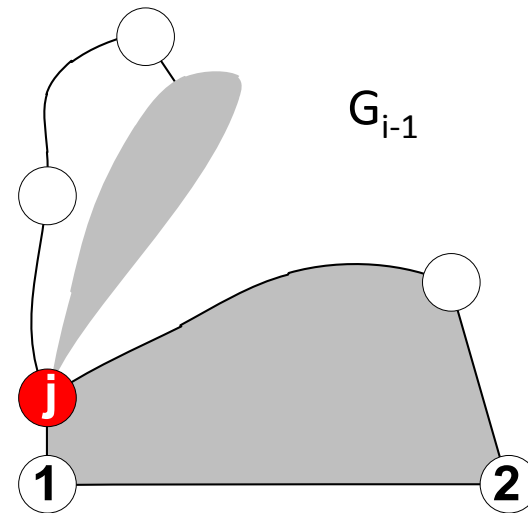
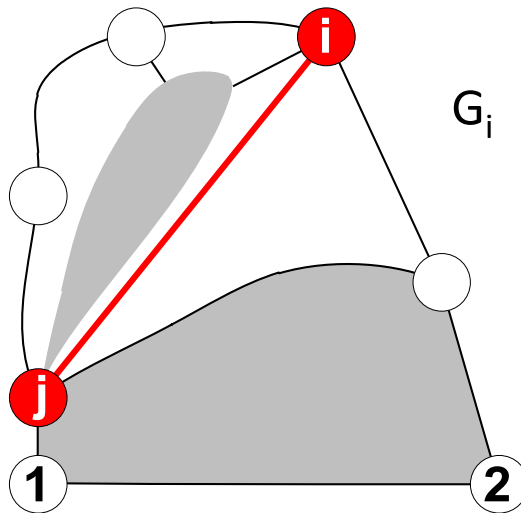


zum 2-Zusammenhang

Existenz

Lemma: G hat eine kanonische Ordnung.

- Notwendig: i nicht inzident zu einer Sehne der Außenfläche von G_i
- Hinreichend:
 - Jeder 1-Separator von G_{i-1} ist Teil eines 2-Separators von G_i .
 - Da G_i Triangulation, muss 2-Separator auf Außenfläche von G_i sein.
 - Dann existiert Sehne zwischen den beiden Separator-Knoten.



Sehne (i,j) der Außenfläche: 2-Separator

1-Separator j



zum 2-Zusammenhang

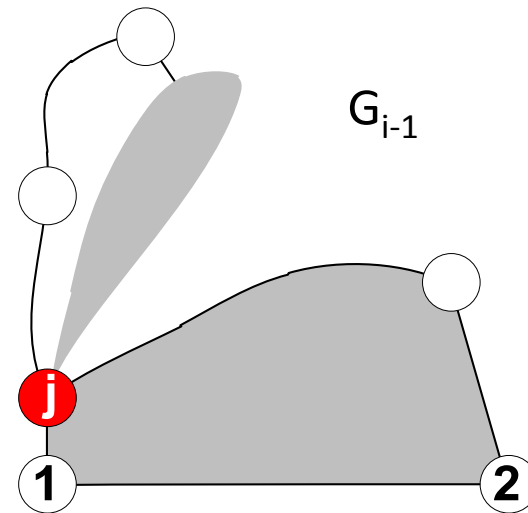
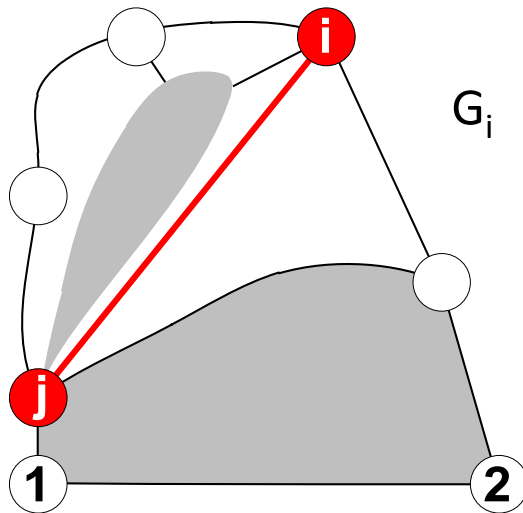
© 11.09.16

Jens M. Schmidt

Existenz

Lemma: G hat eine kanonische Ordnung.

- Notwendig: i nicht inzident zu einer Sehne der Außenfläche von G_i
- Hinreichend:
 - Jeder 1-Separator von G_{i-1} ist Teil eines 2-Separators von G_i .
 - Da G_i Triangulation, muss 2-Separator auf Außenfläche von G_i sein.
 - Dann existiert Sehne zwischen den beiden Separator-Knoten.
- Existiert ein Knoten $i \notin \{1,2\}$, der nicht zu einer Sehne inzident ist?



Sehne (i,j) der Außenfläche: 2-Separator

1-Separator j



zum 2-Zusammenhang

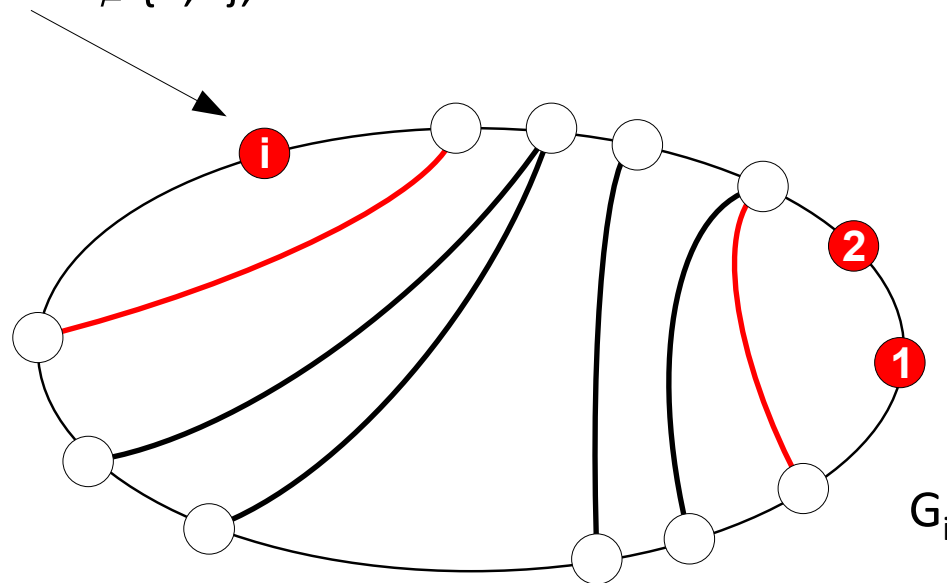
© 11.09.16

Jens M. Schmidt

Existenz

Lemma: G hat eine kanonische Ordnung.

- Notwendig: i nicht inzident zu einer Sehne der Außenfläche von G_i
- Hinreichend:
 - Jeder 1-Separator von G_{i-1} ist Teil eines 2-Separators von G_i .
 - Da G_i Triangulation, muss 2-Separator auf Außenfläche von G_i sein.
 - Dann existiert Sehne zwischen den beiden Separator-Knoten.
- Existiert ein Knoten $i \notin \{1,2\}$, der nicht zu einer Sehne inzident ist?



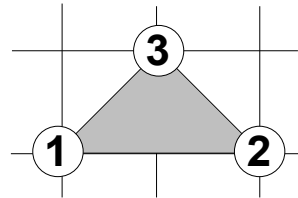
„minimale“ Sehnen überdecken solche Knoten!

Shift-Algorithmus

Zeichne Knoten 1,2,3 im Einheitsgitter an den Koordinaten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.

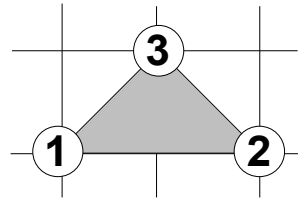
Shift-Algorithmus

Zeichne Knoten 1,2,3 im Einheitsgitter an den Koordinaten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.



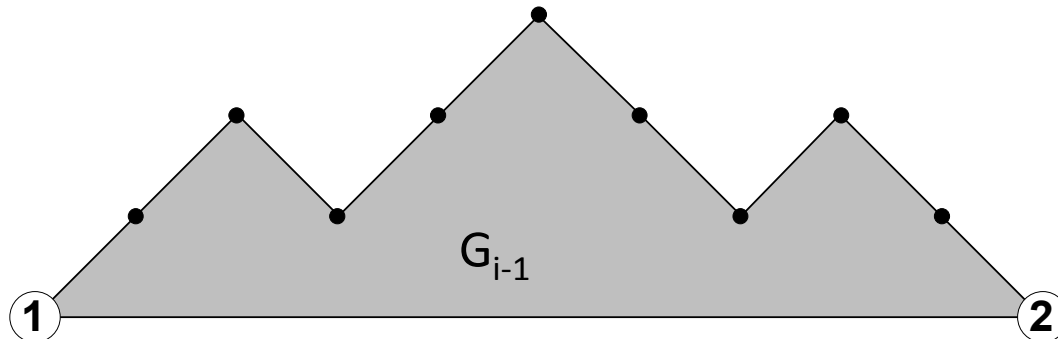
Shift-Algorithmus

Zeichne Knoten 1,2,3 im Einheitsgitter an den Koordinaten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.



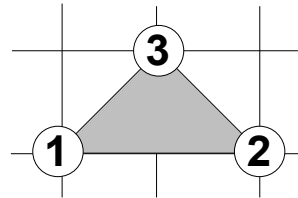
Invarianten vor jedem nächsten Knoten $i \geq 4$:

- 1 und 2 sind an Koordinaten $(0,0)$ und $(2i-6,0)$
- x-Koordinaten der Knoten der Außenfläche von G_{i-1} monoton steigend
- Jede Kante $\neq (1,2)$ auf Außenfläche von G_{i-1} hat Steigung 1 oder -1.



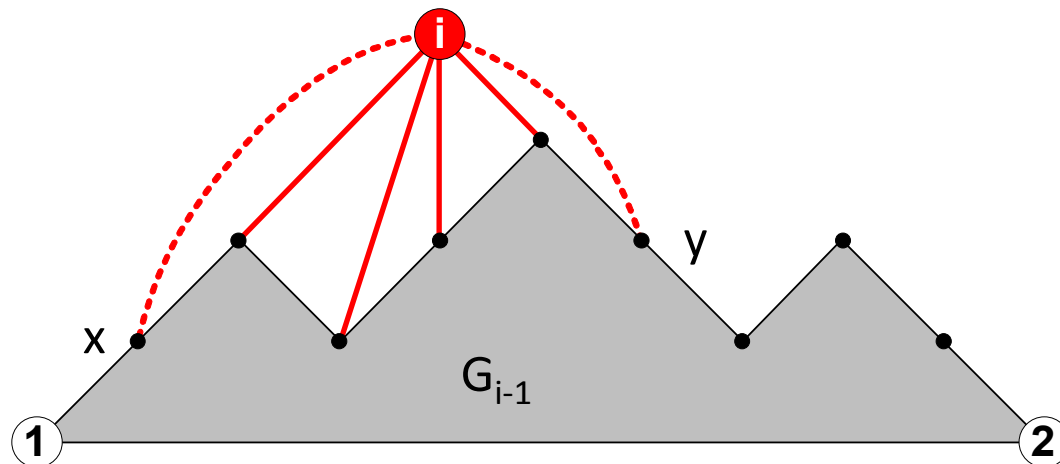
Shift-Algorithmus

Zeichne Knoten 1,2,3 im Einheitsgitter an den Koordinaten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.



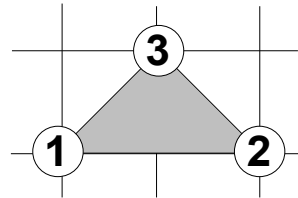
Invarianten vor jedem nächsten Knoten $i \geq 4$:

- 1 und 2 sind an Koordinaten $(0,0)$ und $(2i-6,0)$
- x-Koordinaten der Knoten der Außenfläche von G_{i-1} monoton steigend
- Jede Kante $\neq (1,2)$ auf Außenfläche von G_{i-1} hat Steigung 1 oder -1.



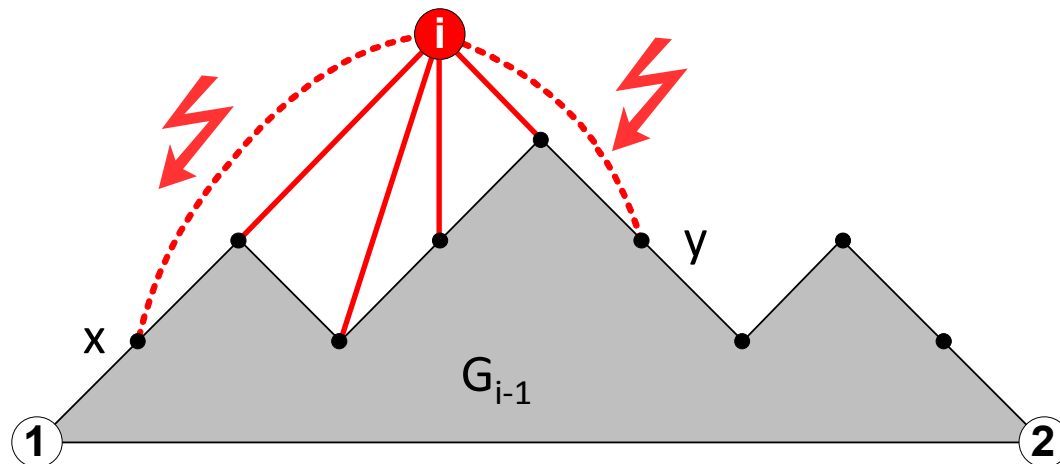
Shift-Algorithmus

Zeichne Knoten 1,2,3 im Einheitsgitter an den Koordinaten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.



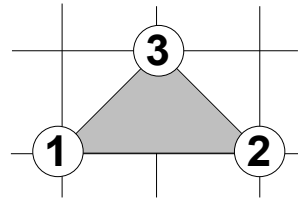
Invarianten vor jedem nächsten Knoten $i \geq 4$:

- 1 und 2 sind an Koordinaten $(0,0)$ und $(2i-6,0)$
- x-Koordinaten der Knoten der Außenfläche von G_{i-1} monoton steigend
- Jede Kante $\neq (1,2)$ auf Außenfläche von G_{i-1} hat Steigung 1 oder -1.



Shift-Algorithmus

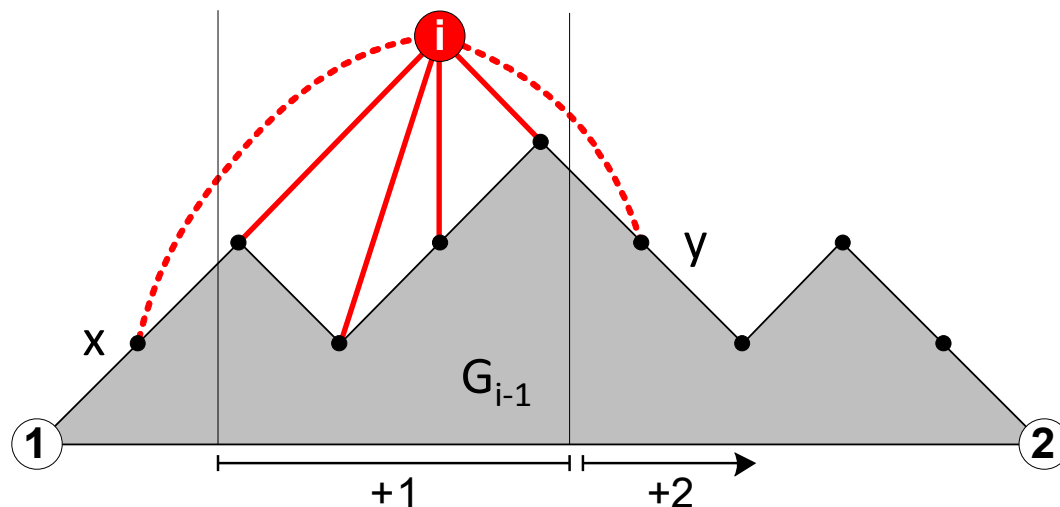
Zeichne Knoten 1,2,3 im Einheitsgitter an den Koordinaten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.



Invarianten vor jedem nächsten Knoten $i \geq 4$:

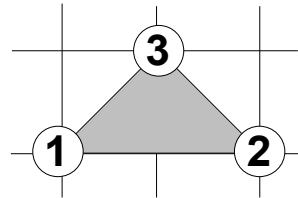
- 1 und 2 sind an Koordinaten $(0,0)$ und $(2i-6,0)$
- x-Koordinaten der Knoten der Außenfläche von G_{i-1} monoton steigend
- Jede Kante $\neq (1,2)$ auf Außenfläche von G_{i-1} hat Steigung 1 oder -1.

Idee!



Shift-Algorithmus

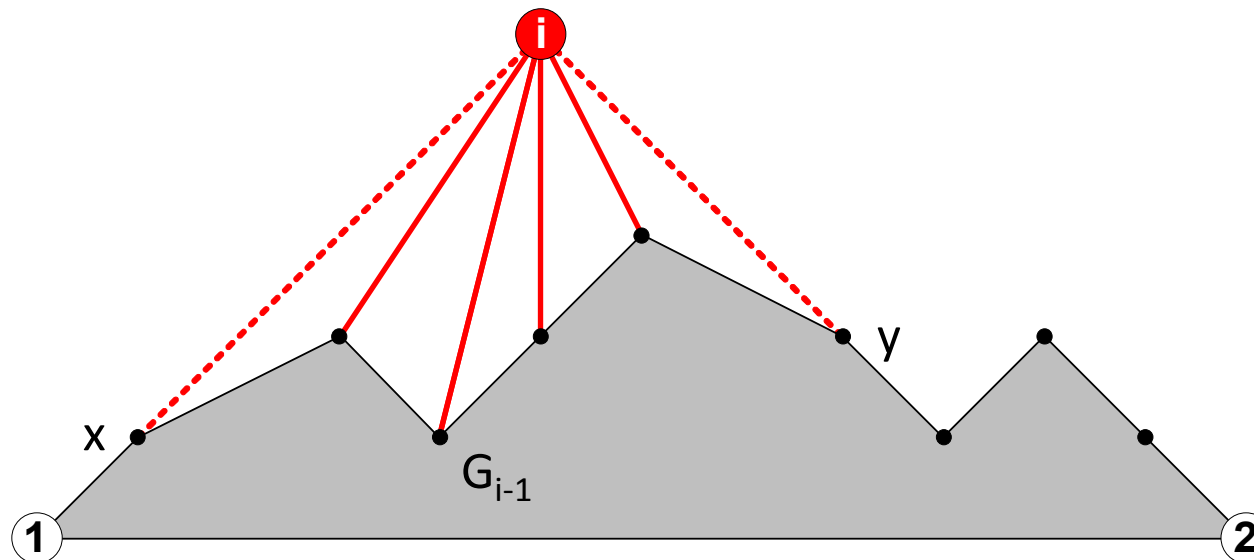
Zeichne Knoten 1,2,3 im Einheitsgitter an den Koordinaten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.



Invarianten vor jedem nächsten Knoten $i \geq 4$:

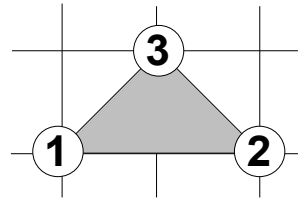
- 1 und 2 sind an Koordinaten $(0,0)$ und $(2i-6,0)$
- x-Koordinaten der Knoten der Außenfläche von G_{i-1} monoton steigend
- Jede Kante $\neq (1,2)$ auf Außenfläche von G_{i-1} hat Steigung 1 oder -1.

Idee!



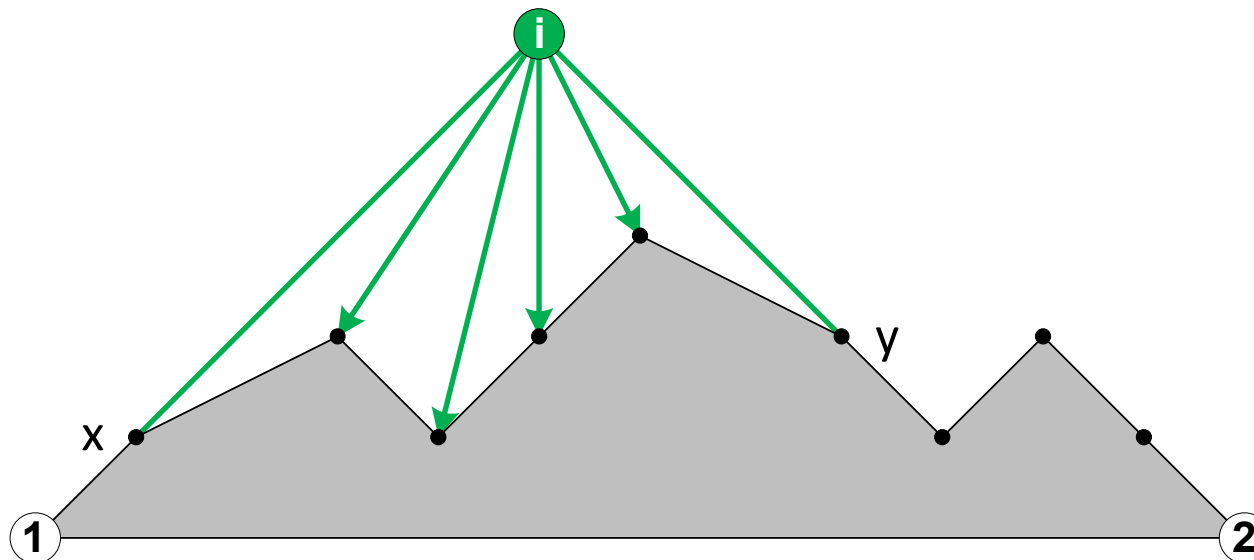
Shift-Algorithmus

Zeichne Knoten 1,2,3 im Einheitsgitter an den Koordinaten $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.

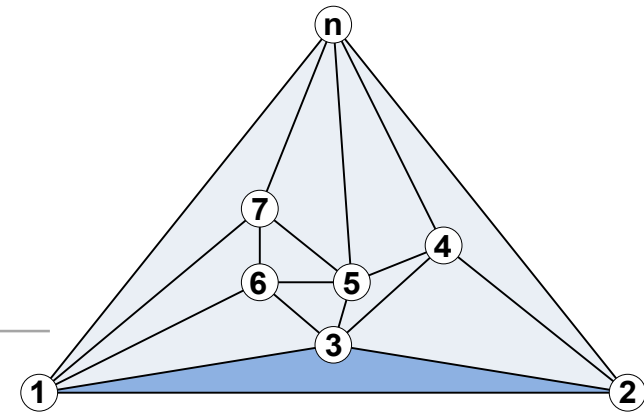
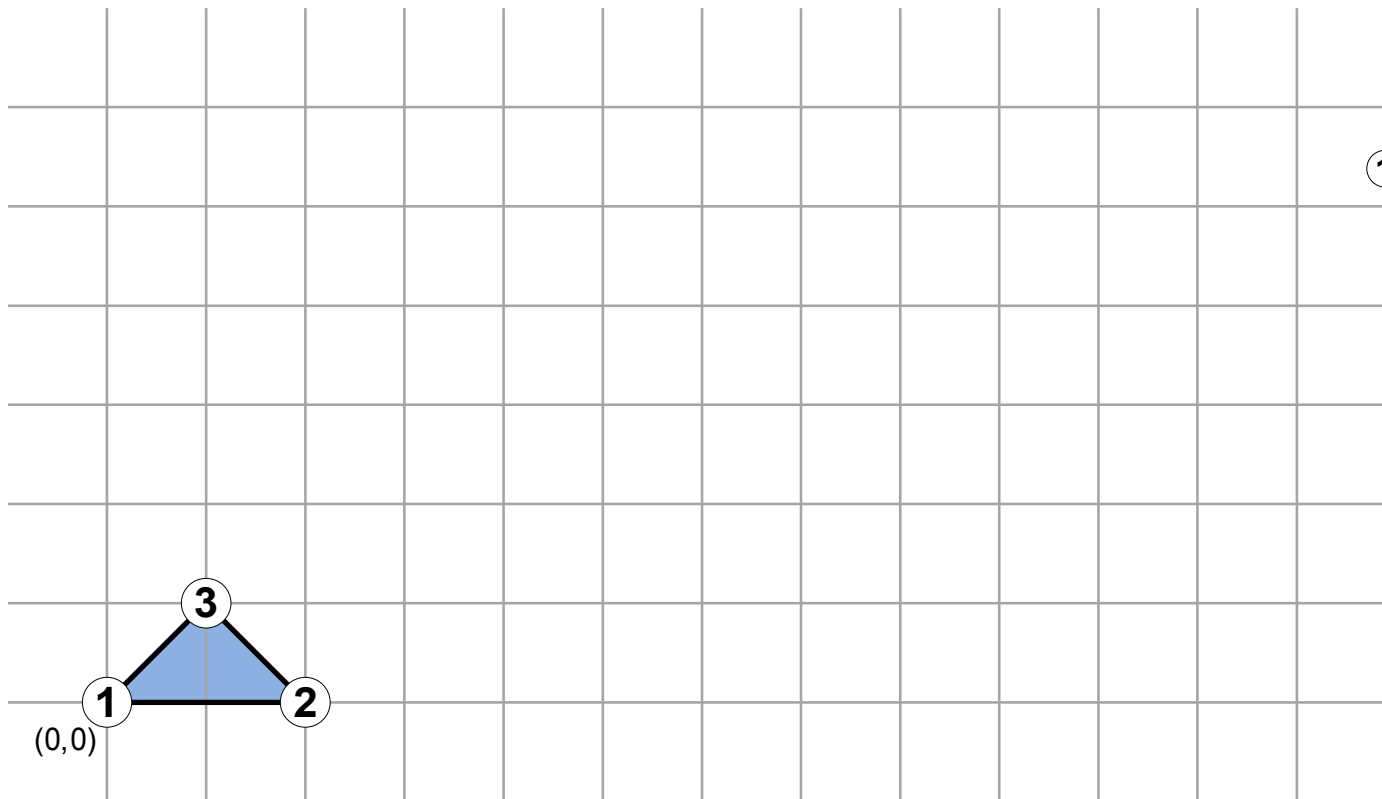


Invarianten vor jedem nächsten Knoten $i \geq 4$:

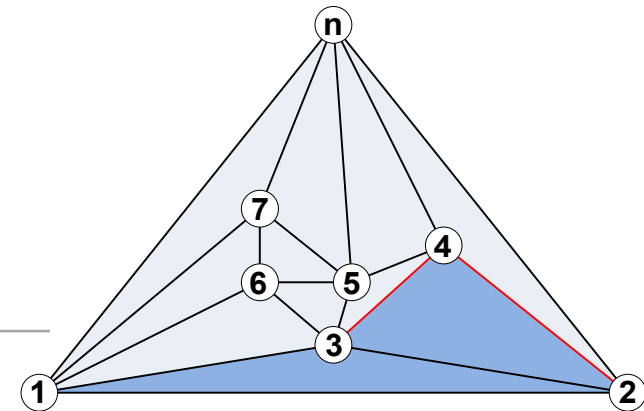
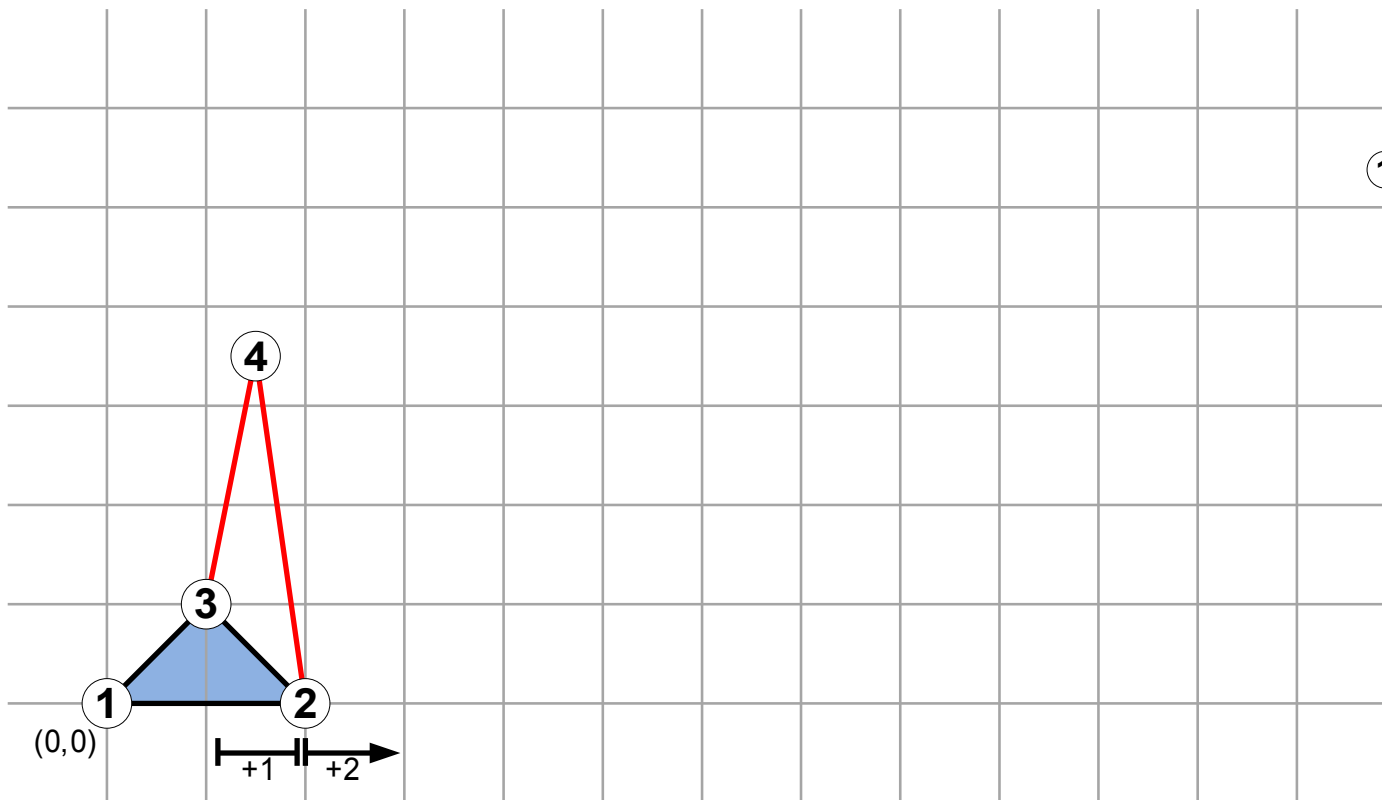
- 1 und 2 sind an Koordinaten $(0,0)$ und $(2i-6,0)$
- x-Koordinaten der Knoten der Außenfläche von G_{i-1} monoton steigend
- Jede Kante $\neq (1,2)$ auf Außenfläche von G_{i-1} hat Steigung 1 oder -1.



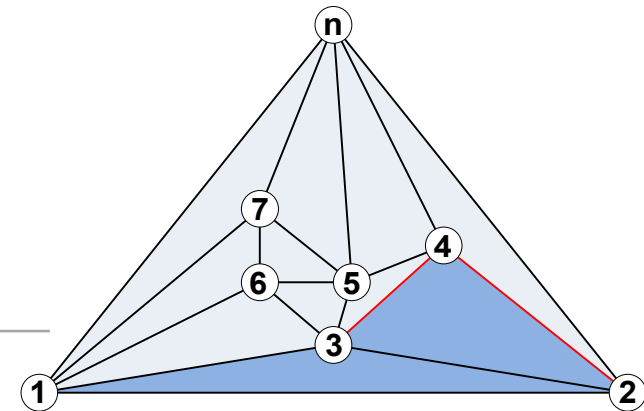
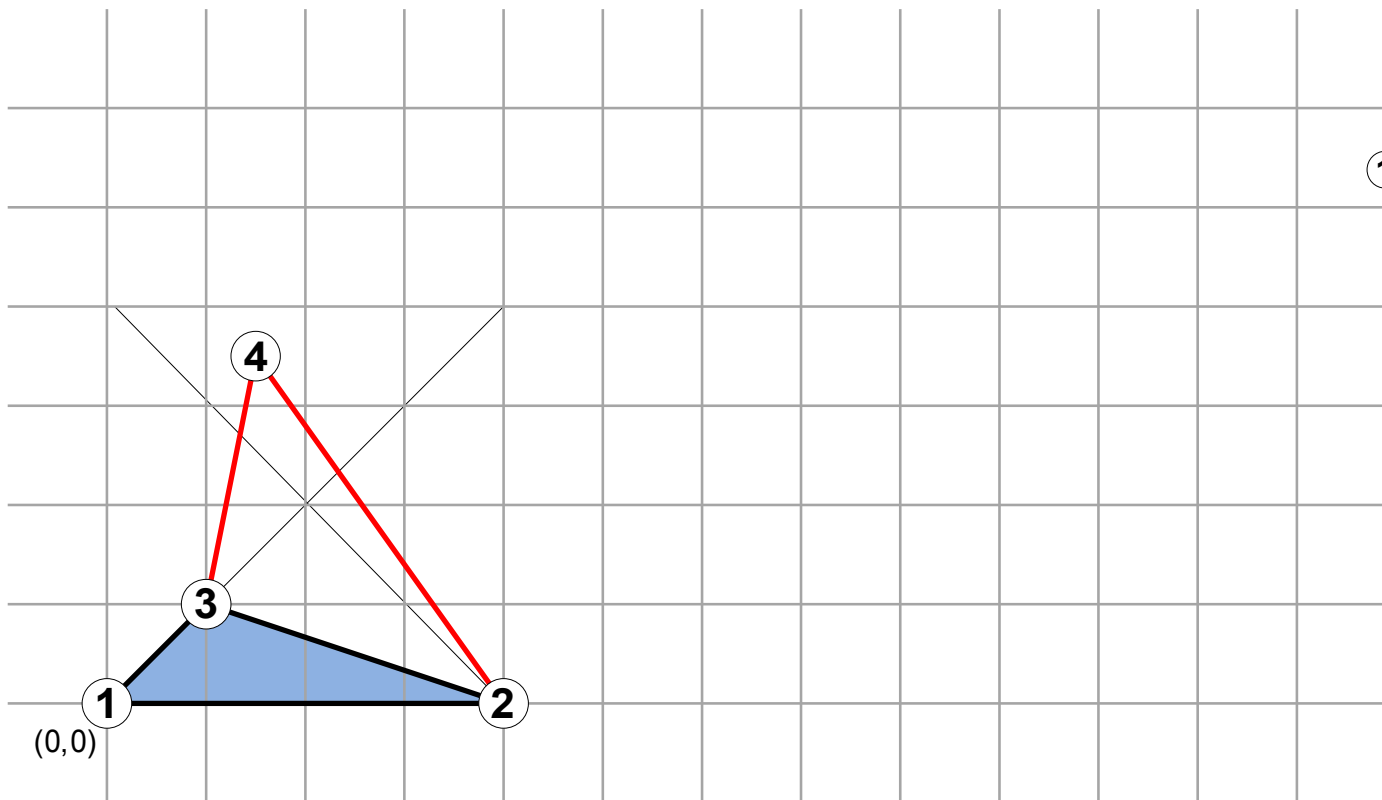
Shift-Algorithmus



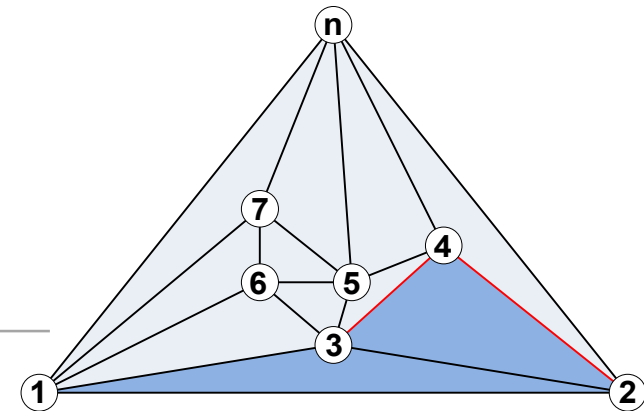
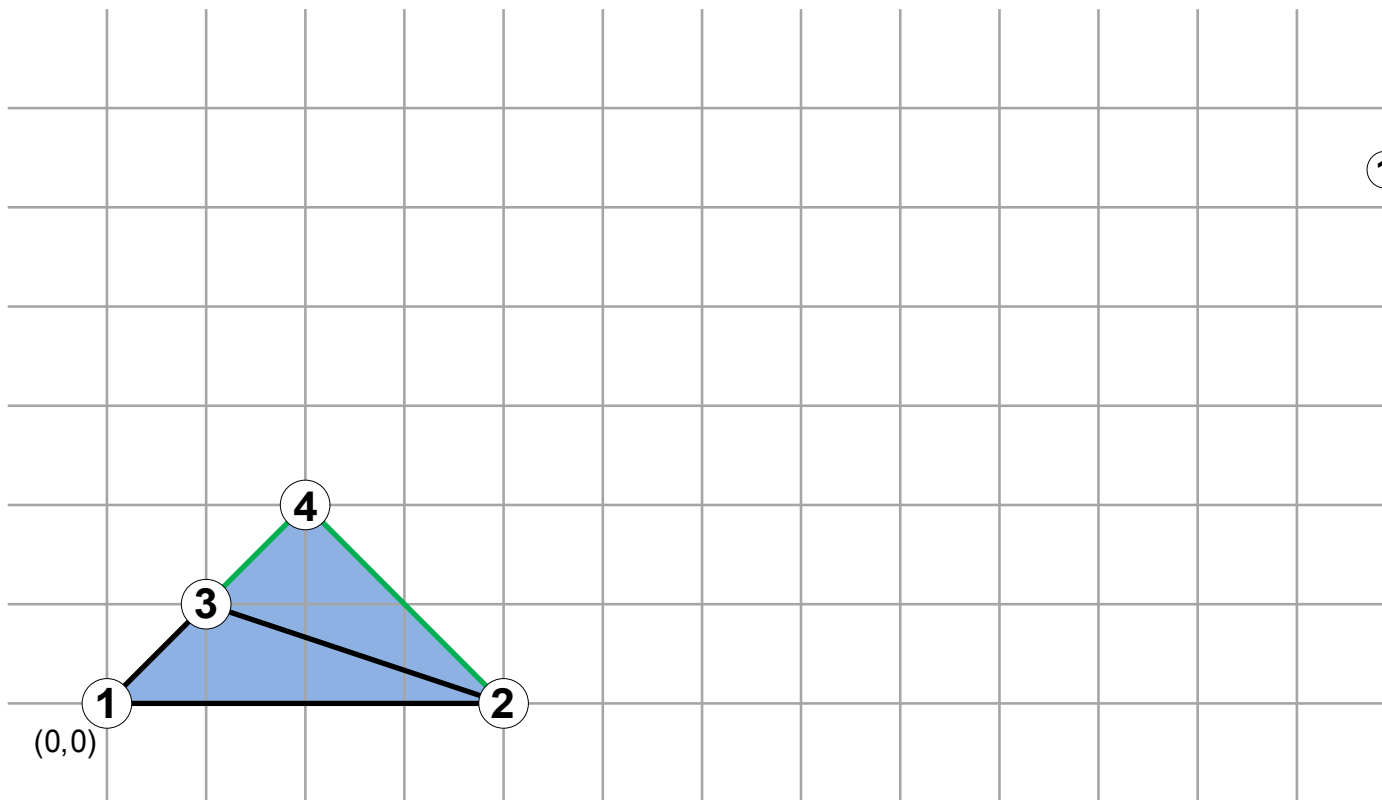
Shift-Algorithmus



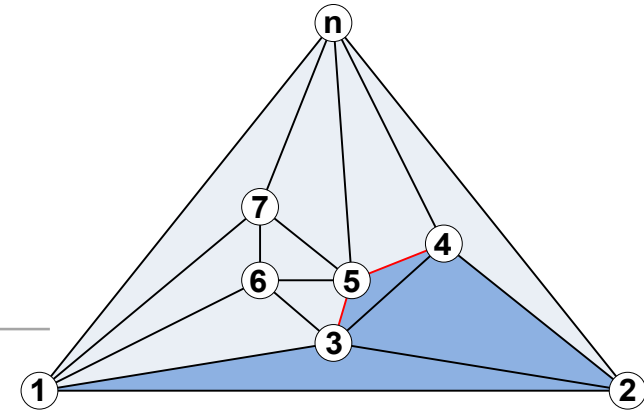
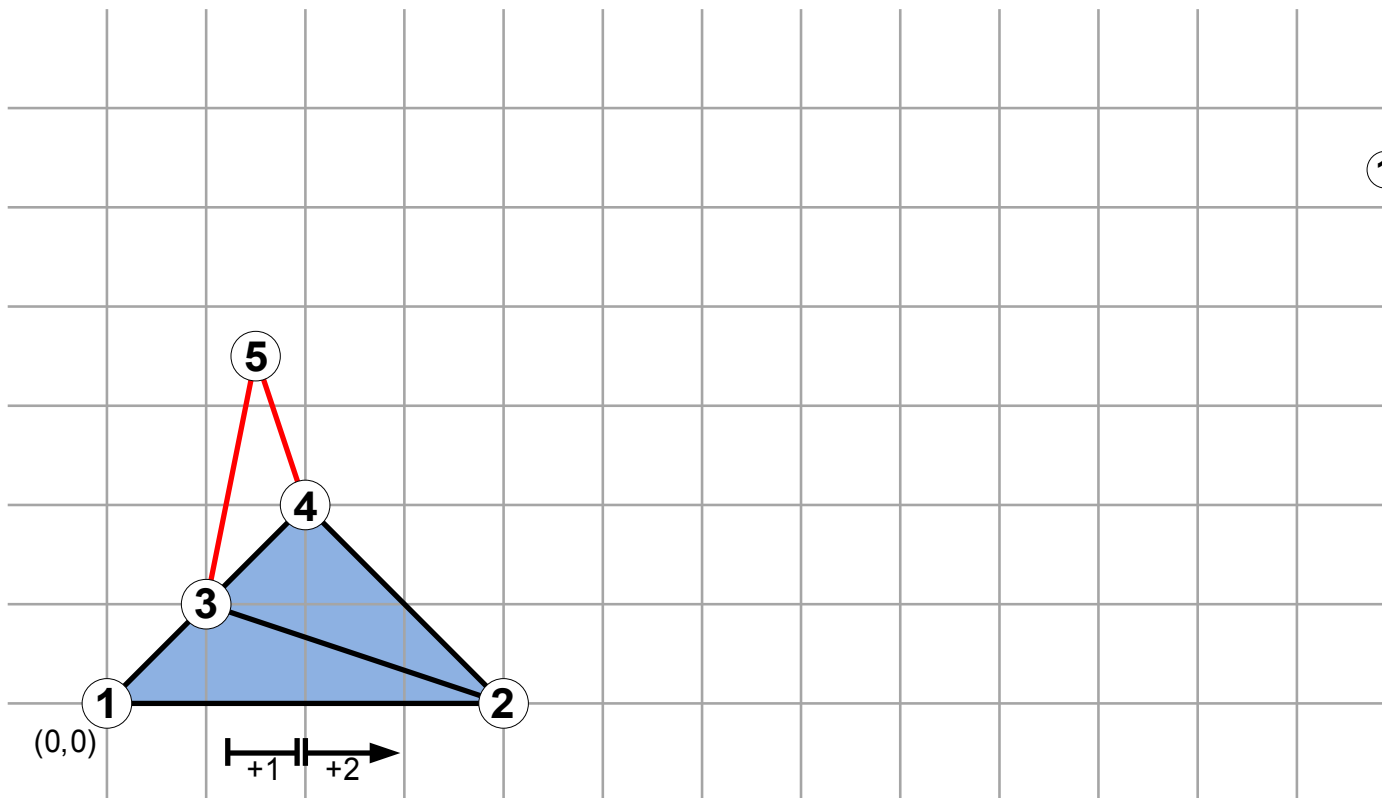
Shift-Algorithmus



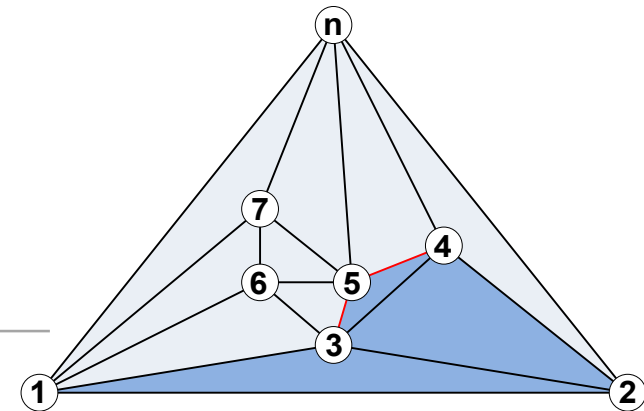
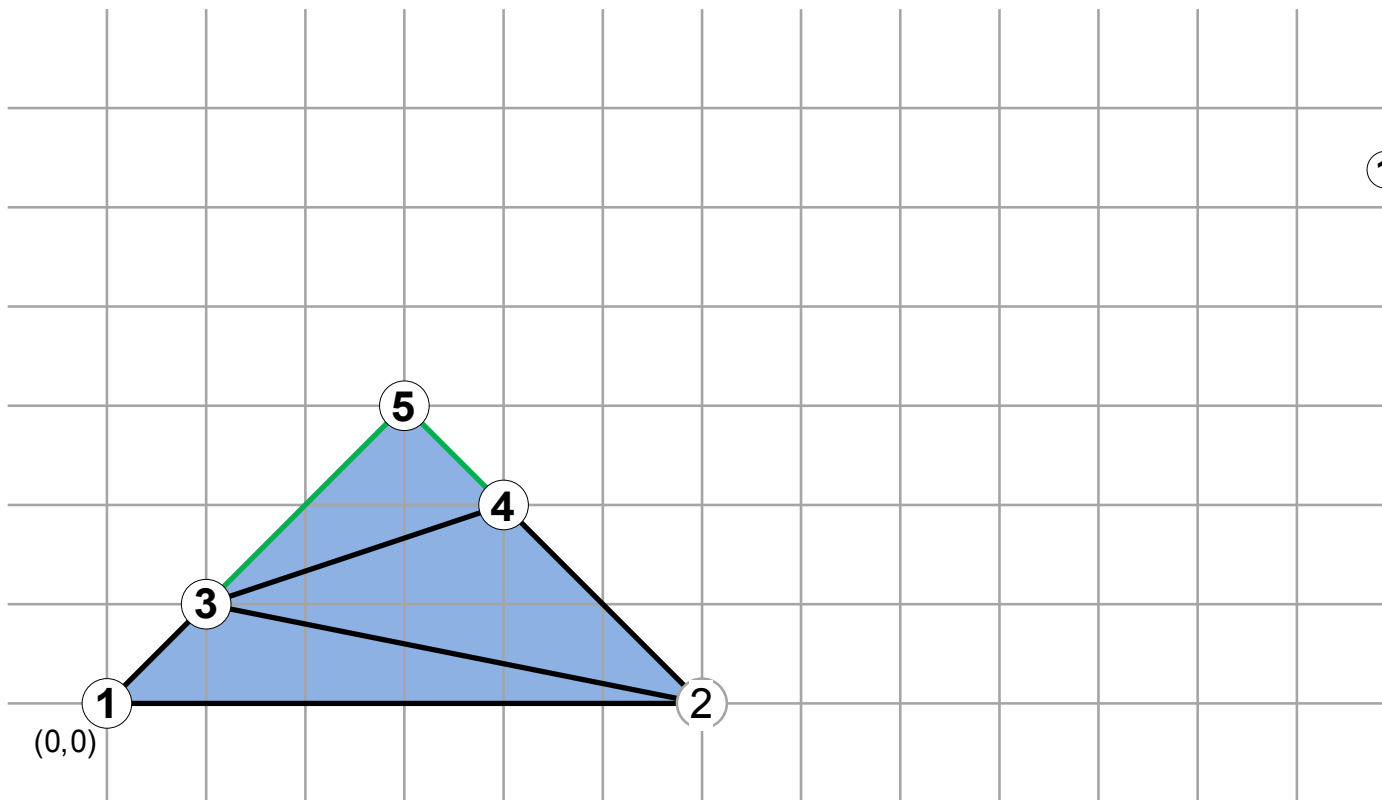
Shift-Algorithmus



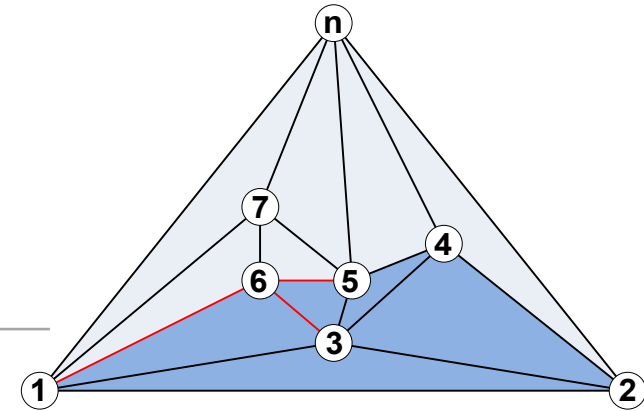
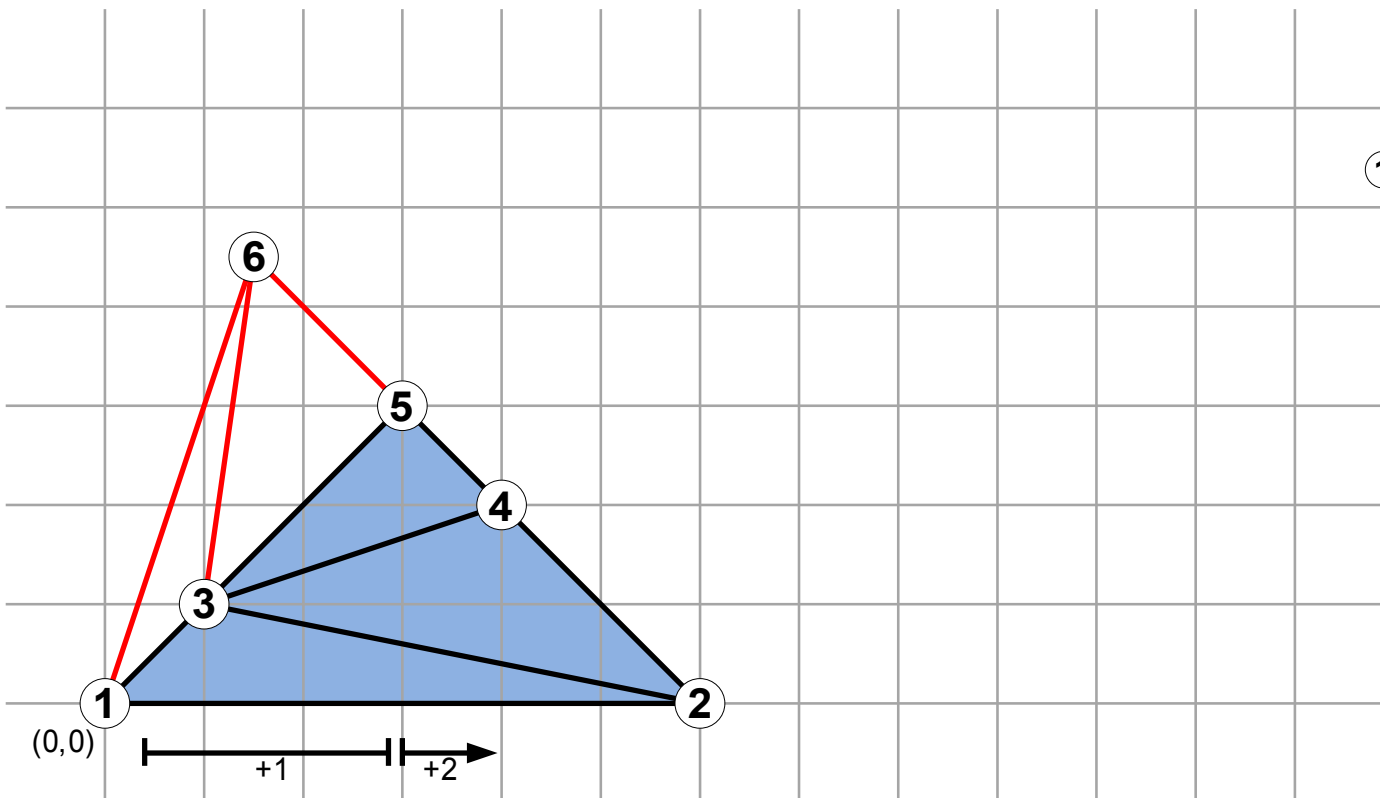
Shift-Algorithmus



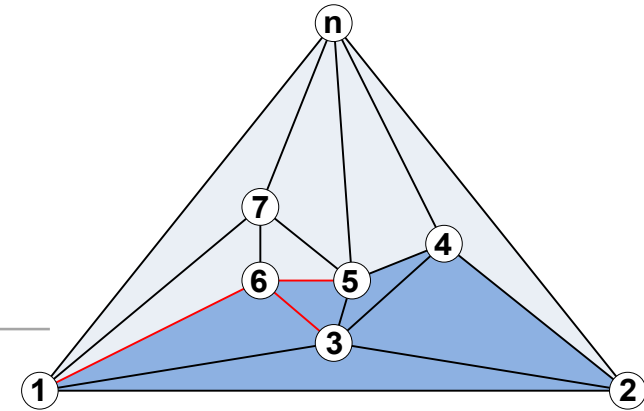
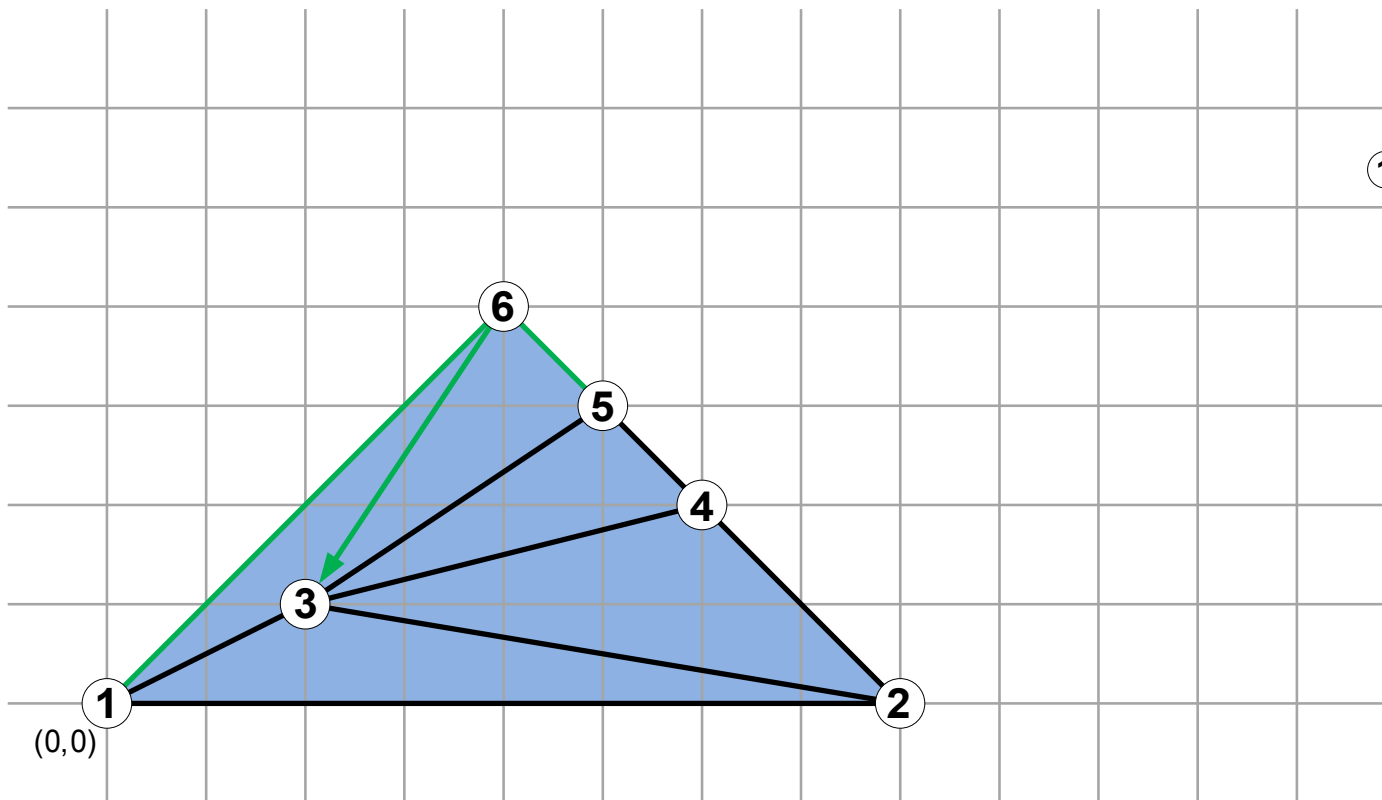
Shift-Algorithmus



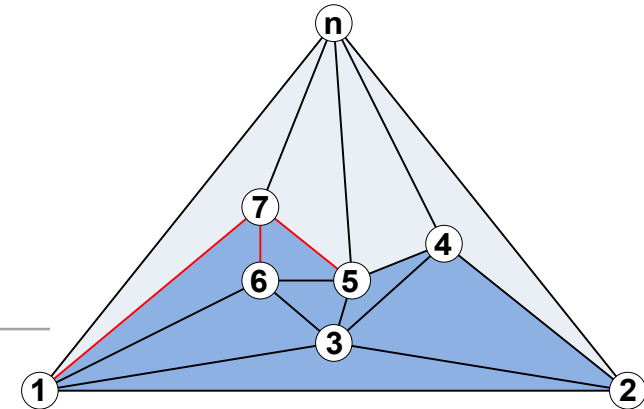
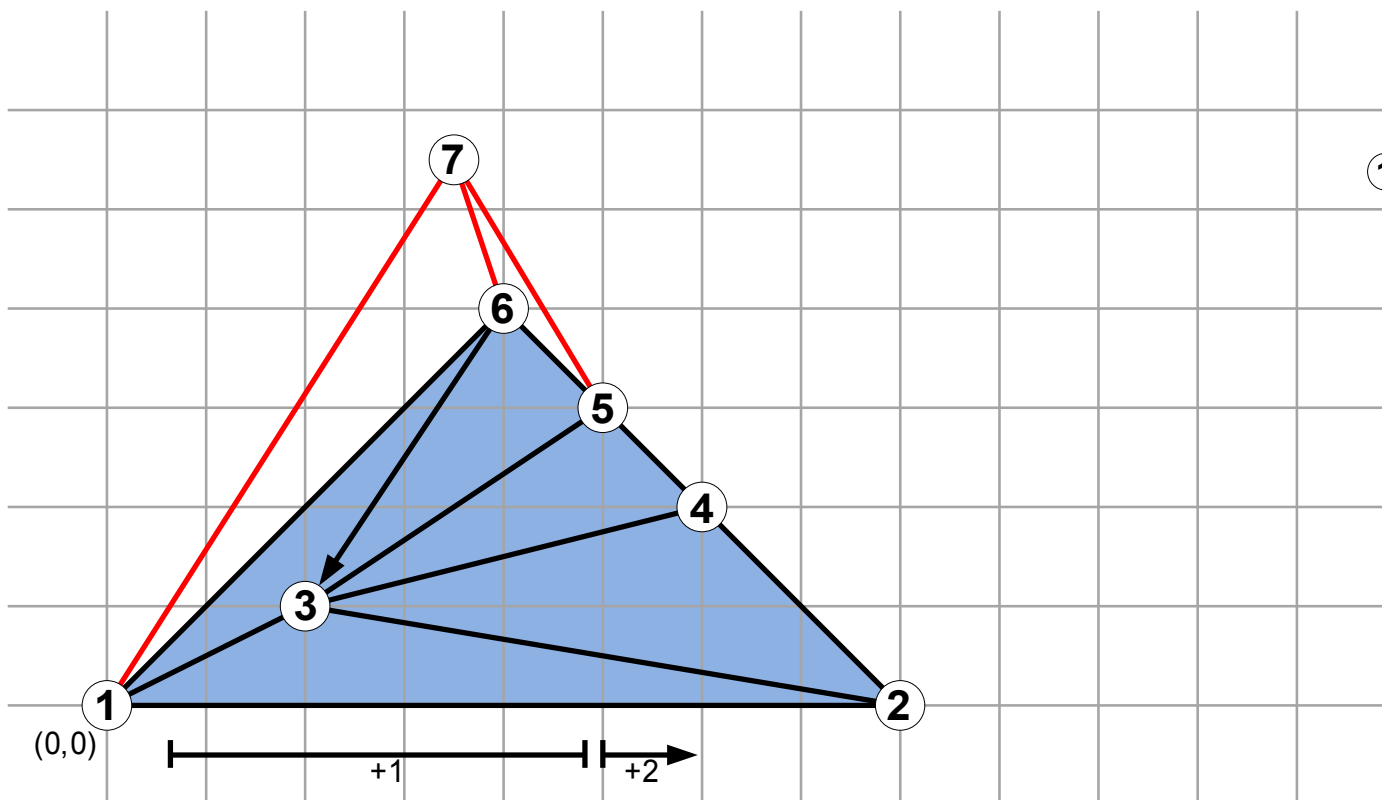
Shift-Algorithmus



Shift-Algorithmus

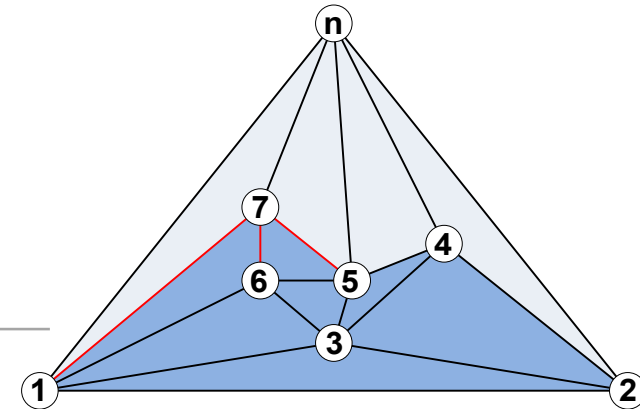
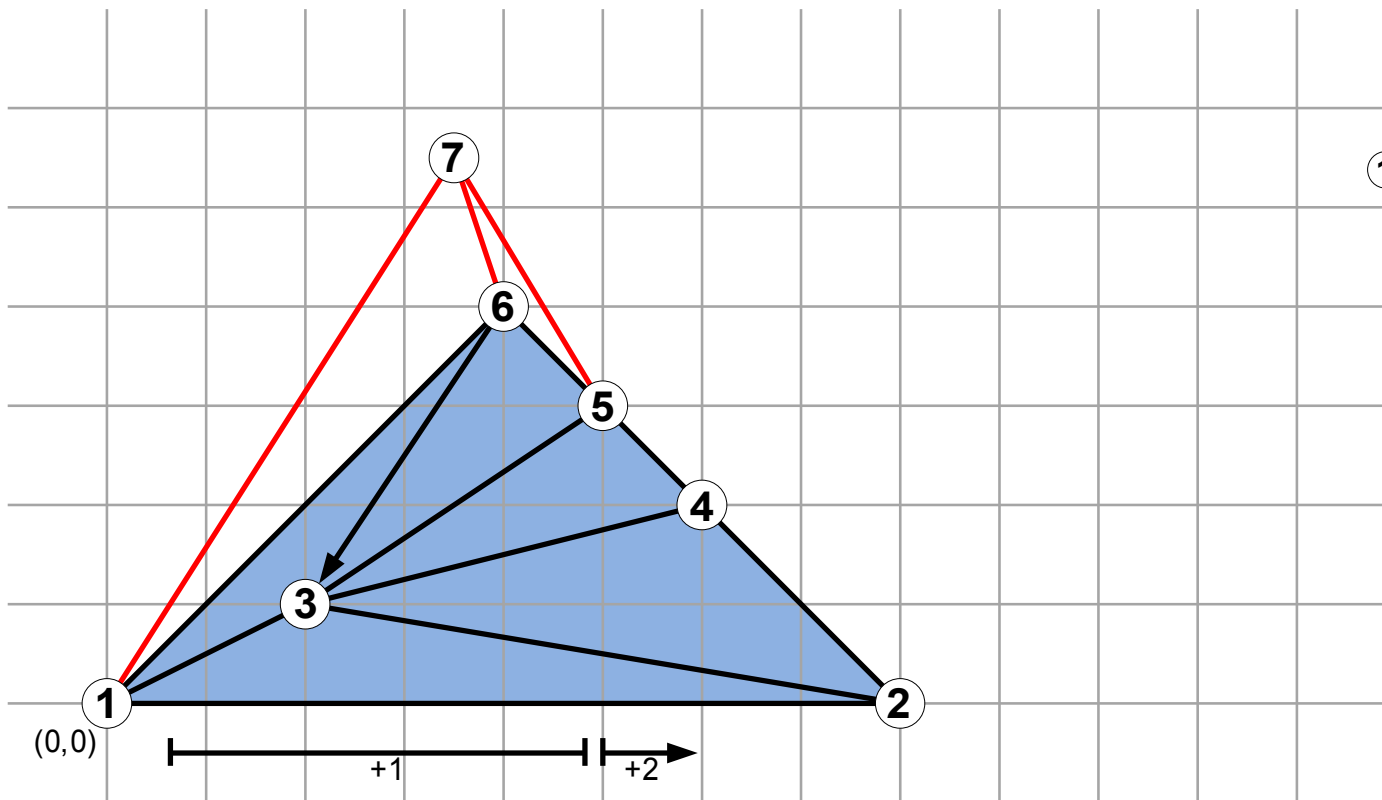


Shift-Algorithmus

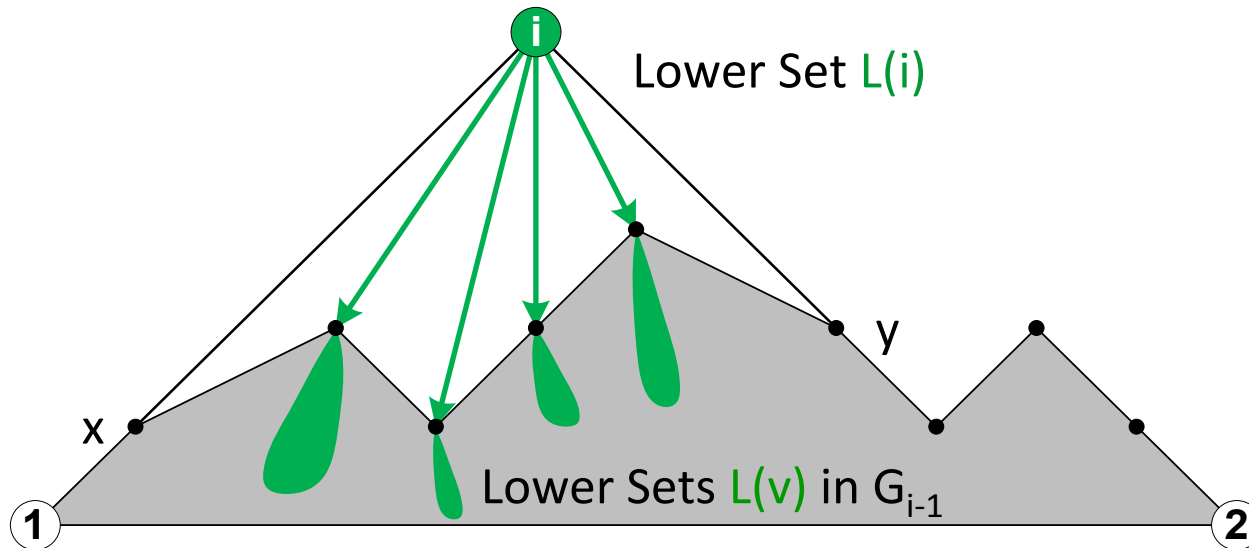


Shift-Algorithmus

Halt! Wie weit wird Knoten 3 verschoben?



Shift-Algorithmus



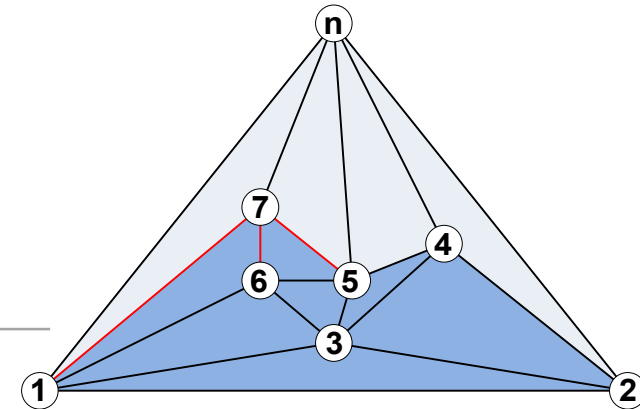
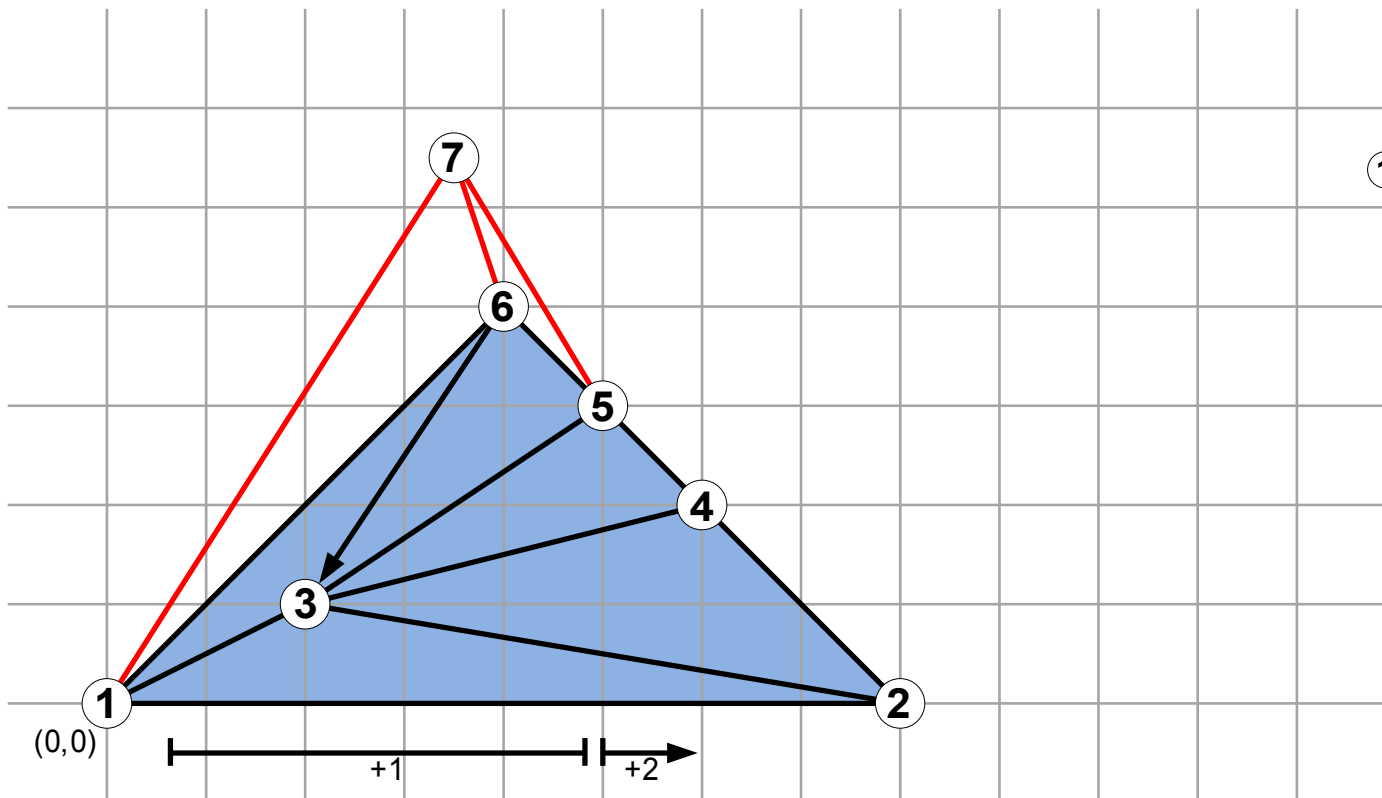
Antwort: Verschiebe $L(v)$ wie v .

Korrektheit:

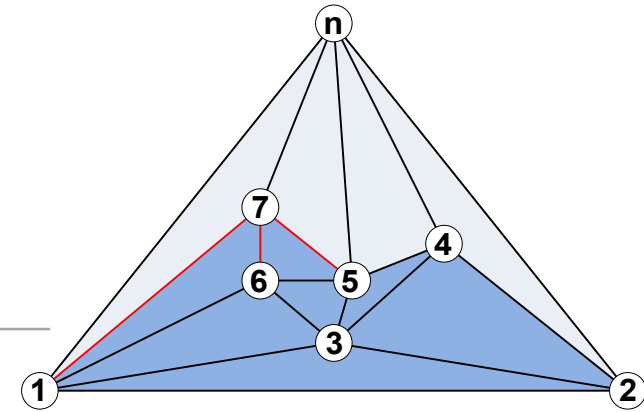
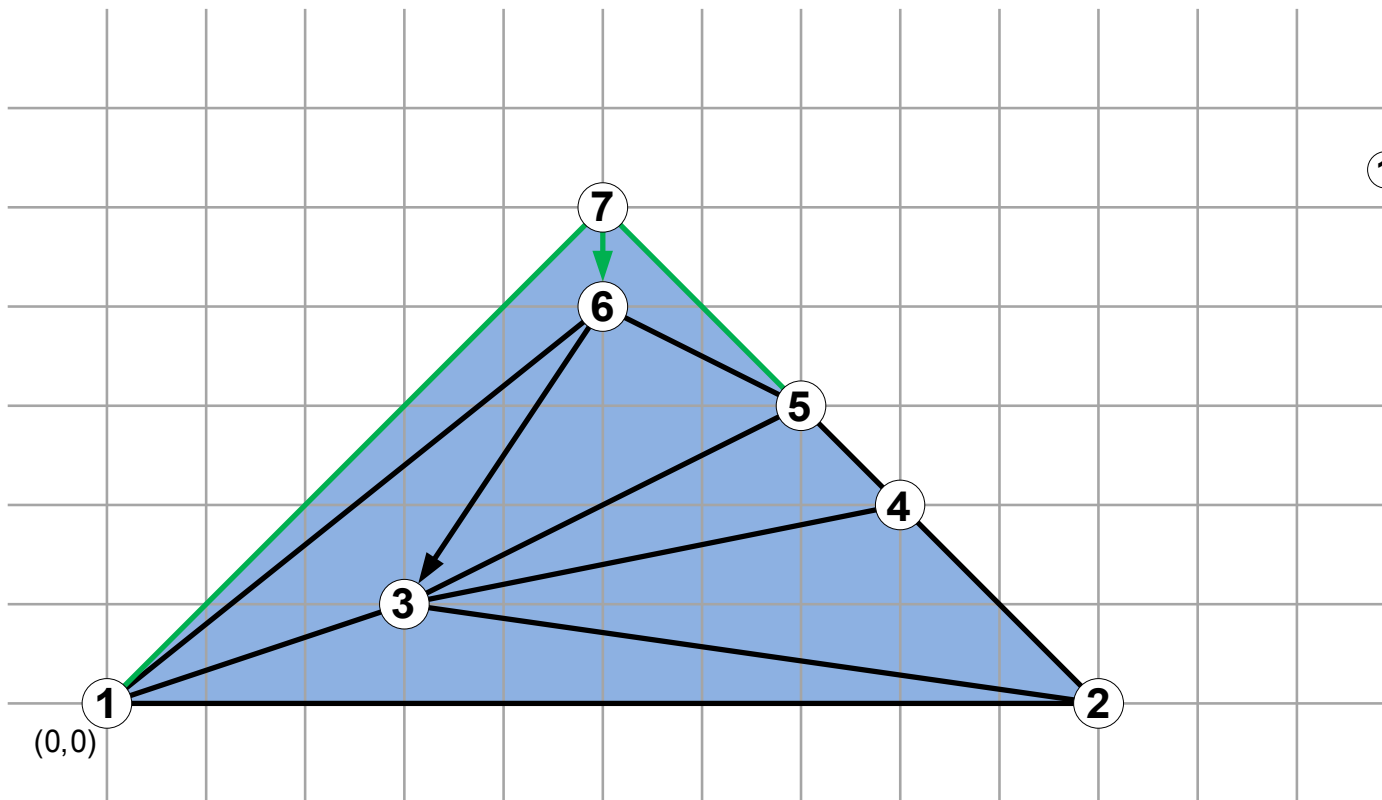
- **Lower Sets** von $]x,y[$ bilden Wald in G_{i-1}
- Per Induktion können die Knoten der **Lower Sets** von
 - $]x,y[$ um 1 nach rechts verschoben werden
 - $[y,n]$ um 2 nach rechts verschoben werden
- i wird an Schnittpunkt der Geraden an x und y mit Steigung 1 und -1 gesetzt
→ i verursacht keine Kantenkreuzung

Shift-Algorithmus

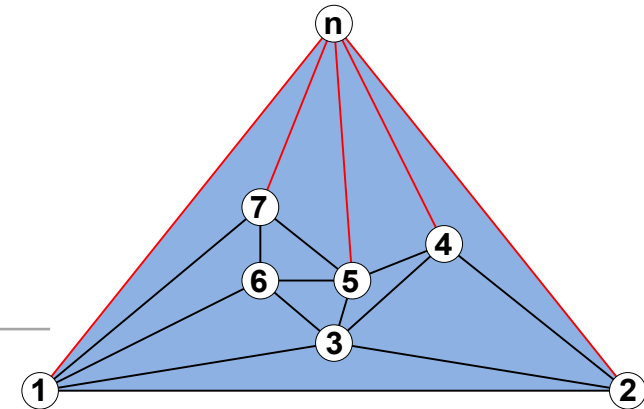
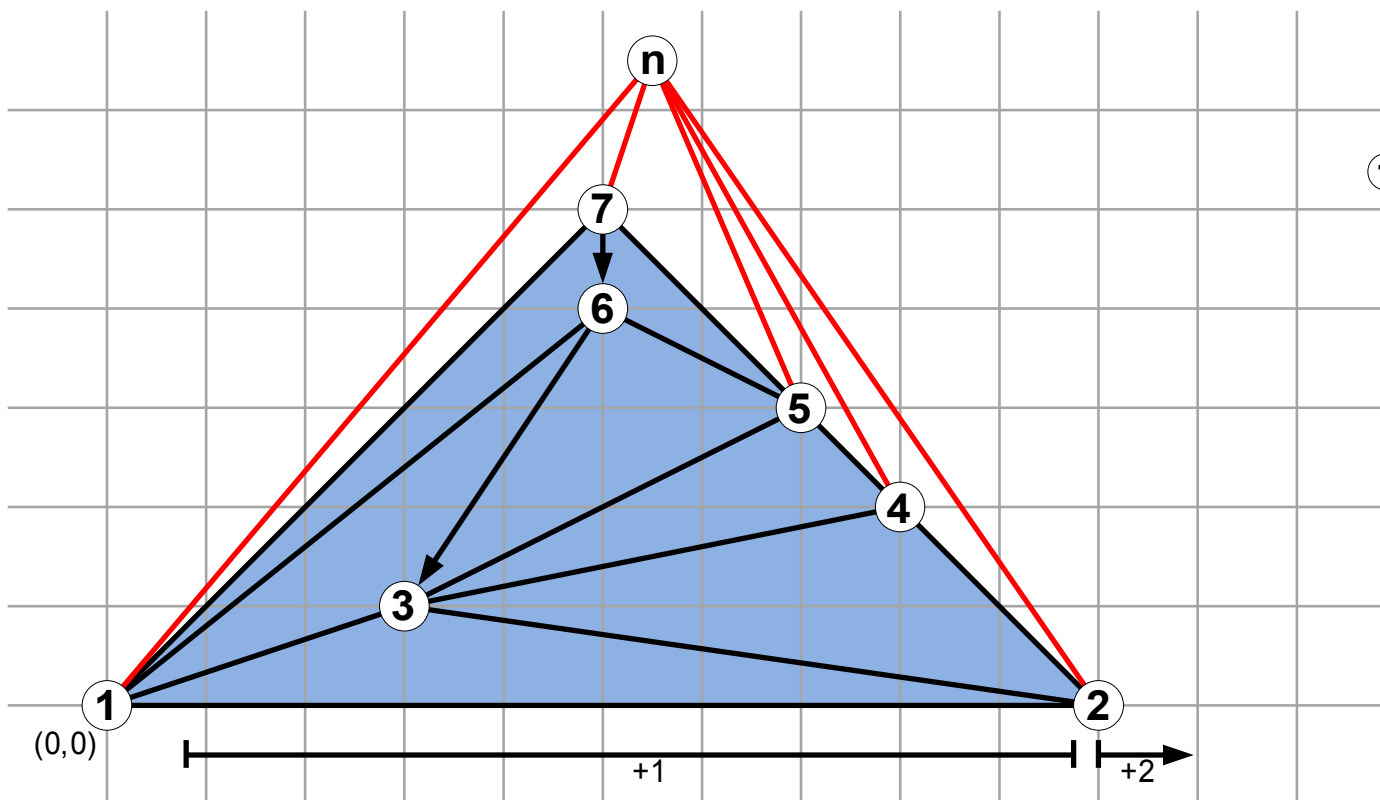
Halt! Wie weit wird Knoten 3 verschoben?



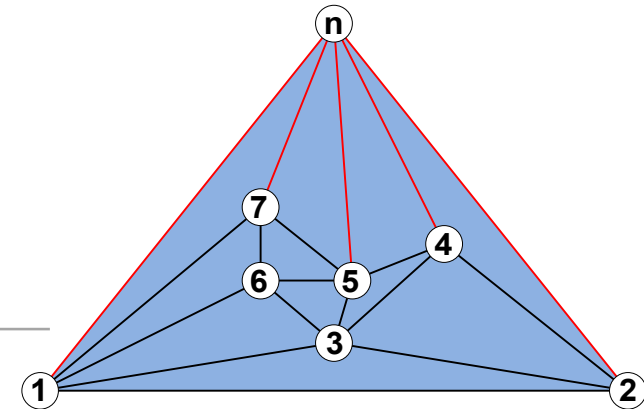
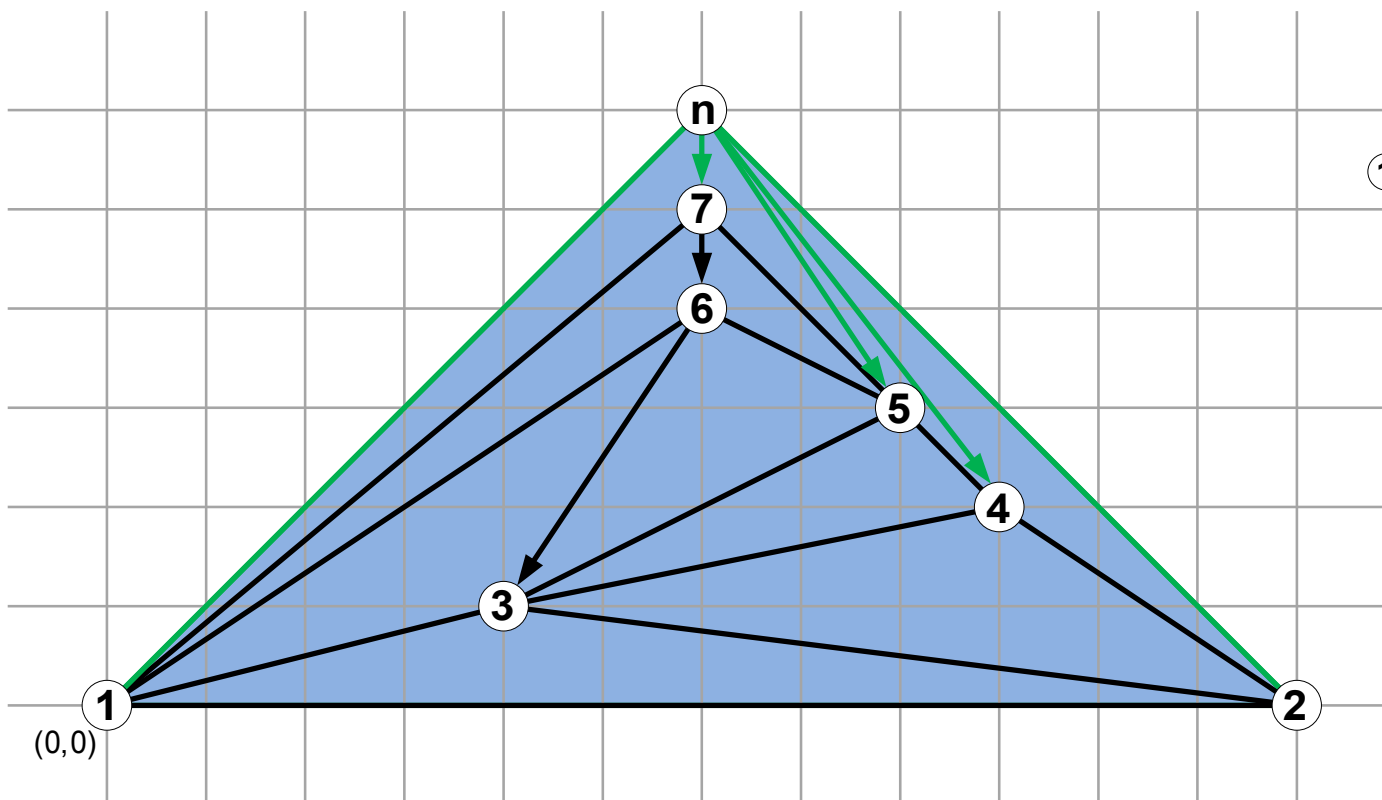
Shift-Algorithmus



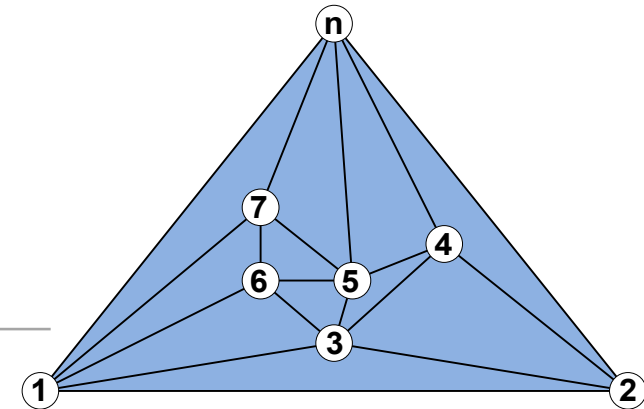
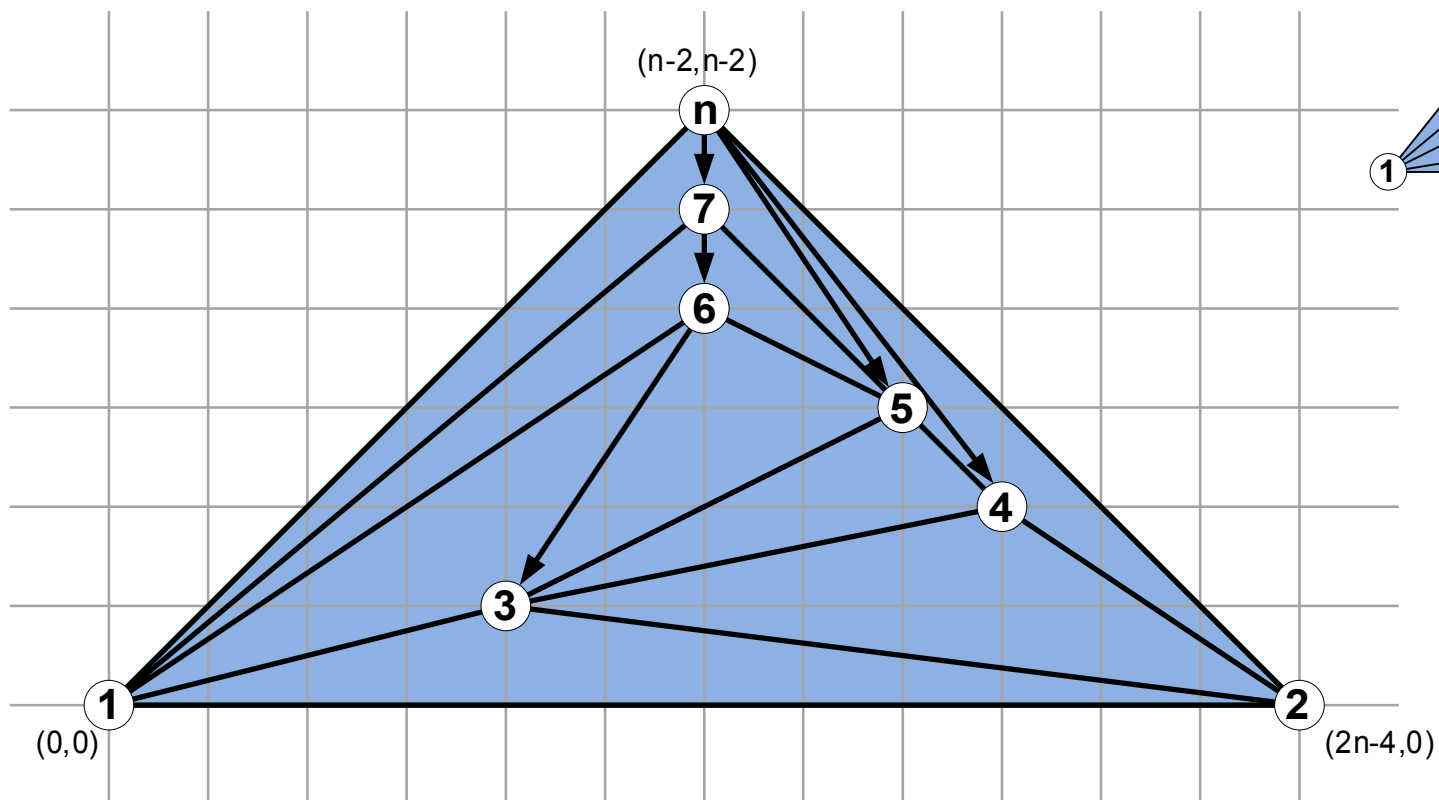
Shift-Algorithmus



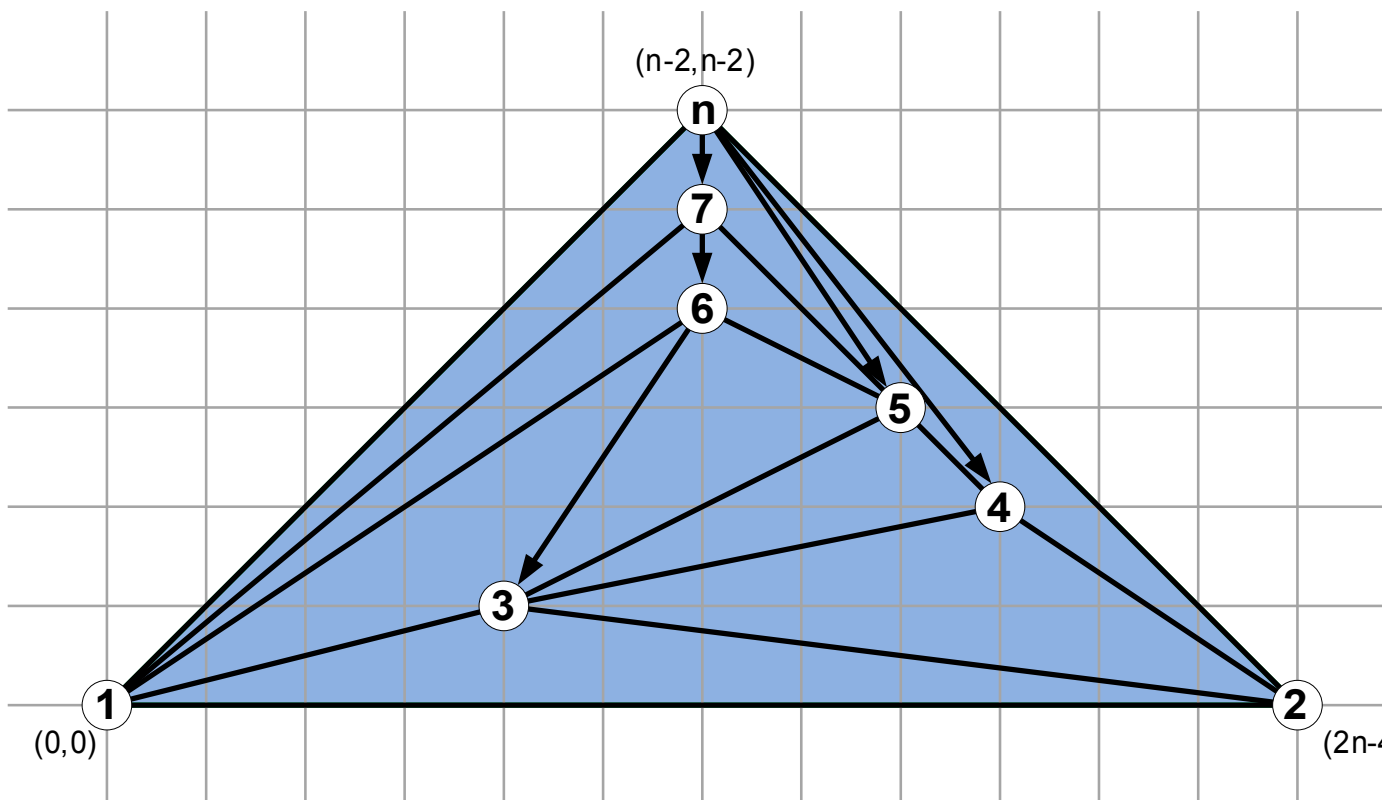
Shift-Algorithmus



Shift-Algorithmus



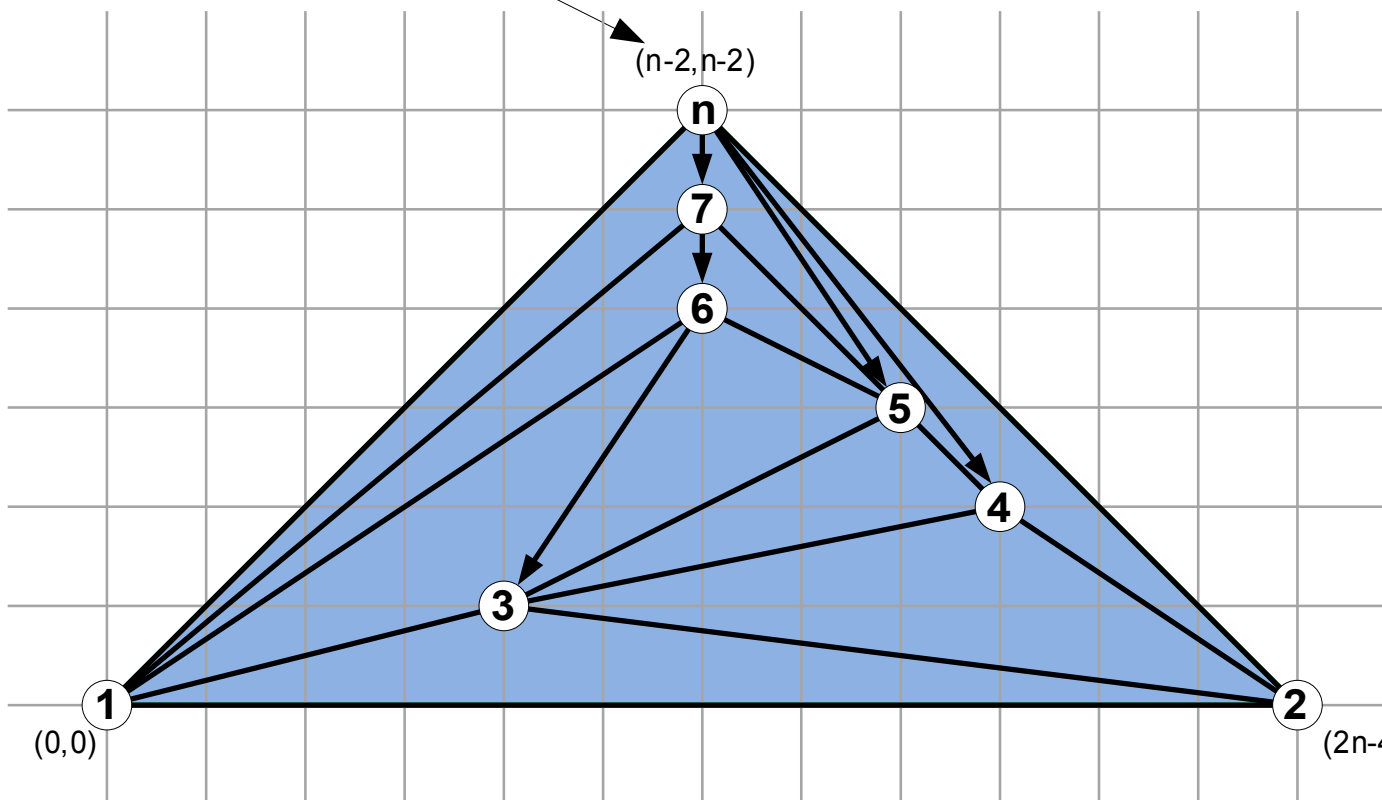
Shift-Algorithmus



Jeweils um +2 verschoben
(außer bei Knoten 1 und 2)

Shift-Algorithmus

Wegen Steigung +1 und -1 an
Kanten (1,n) und (2,n)



(2n-4,0)

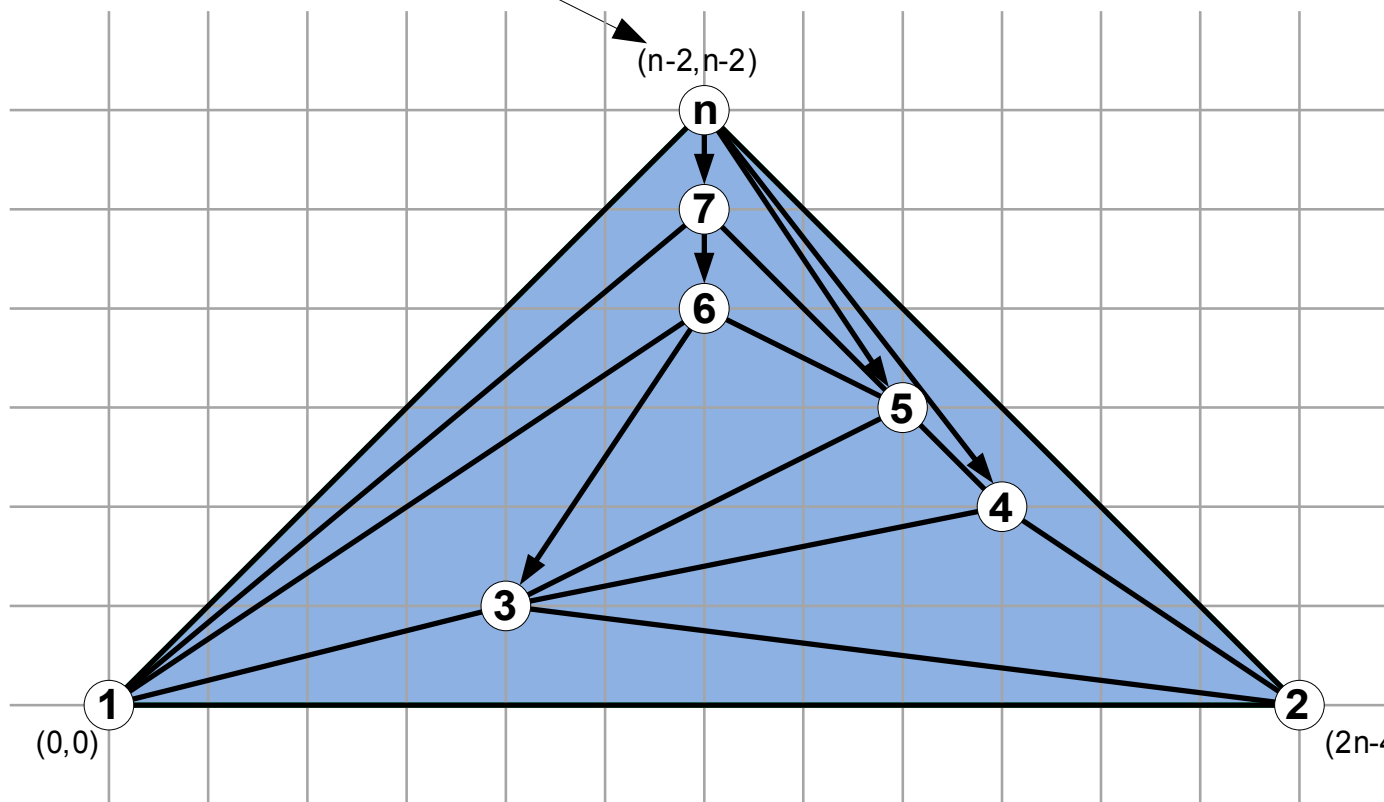
Jeweils um +2 verschoben
(außer bei Knoten 1 und 2)

© 11.09.16

Jens M. Schmidt

Shift-Algorithmus

Wegen Steigung +1 und -1 an
Kanten (1,n) und (2,n)

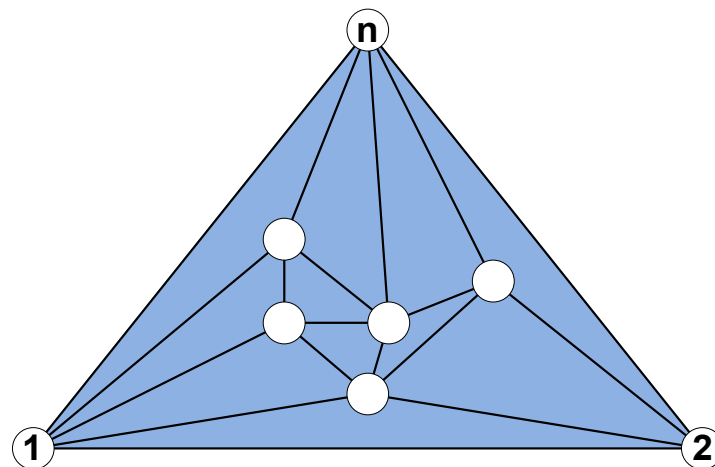


$(2n-4) \times (n-2)$ -Gitter

Jeweils um +2 verschoben
(außer bei Knoten 1 und 2)

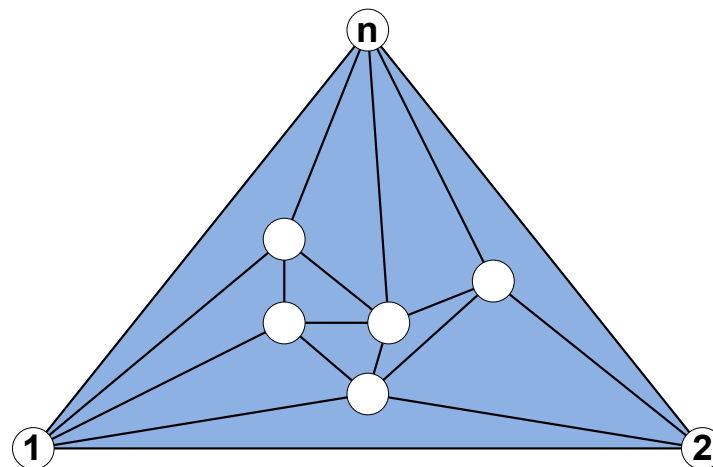
Laufzeit

- Berechnung einer kanonischen Ordnung:
 - Laufzeit für das Finden aller Sehnen von G_{i-1} :



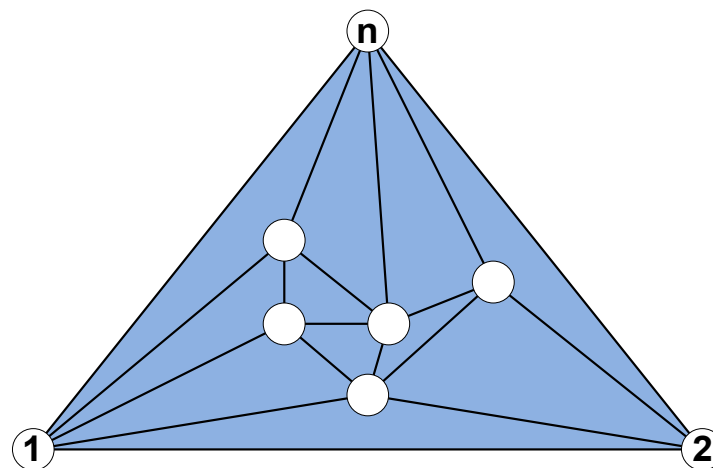
Laufzeit

- Berechnung einer kanonischen Ordnung:
 - Laufzeit für das Finden aller Sehnen von G_{i-1} : $O(n)$
z.B. durch Markierung der Knoten auf der Außenfläche



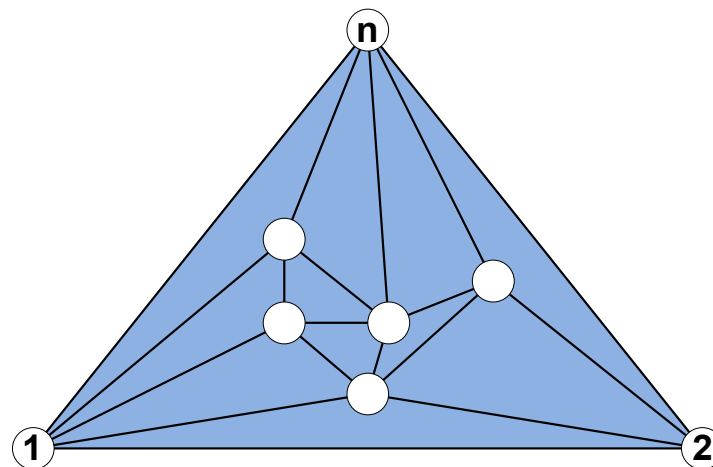
Laufzeit

- Berechnung einer kanonischen Ordnung:
 - Laufzeit für das Finden aller Sehnen von G_{i-1} : $O(n)$
 - z.B. durch Markierung der Knoten auf der Außenfläche
 - Insgesamt $O(n^2)$
 - $O(n)$ mit zusätzlichen Tricks möglich



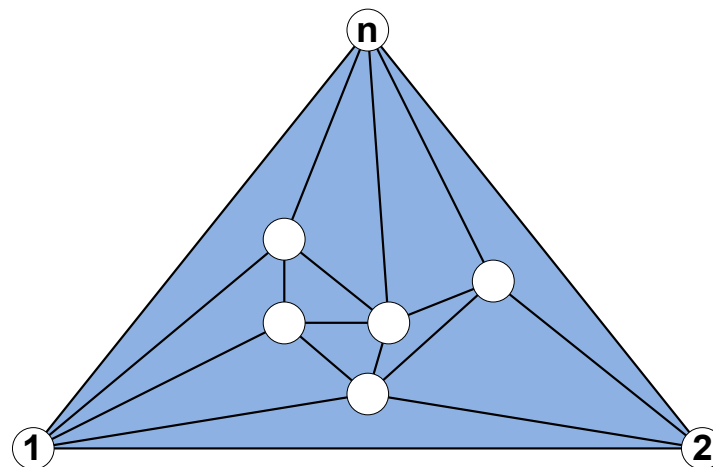
Laufzeit

- Berechnung einer kanonischen Ordnung:
 - Laufzeit für das Finden aller Sehnen von G_{i-1} : $O(n)$
z.B. durch Markierung der Knoten auf der Außenfläche
 - Insgesamt $O(n^2)$
 $O(n)$ mit zusätzlichen Tricks möglich
- Shift-Algorithmus:
 - Laufzeit für Schritt i :



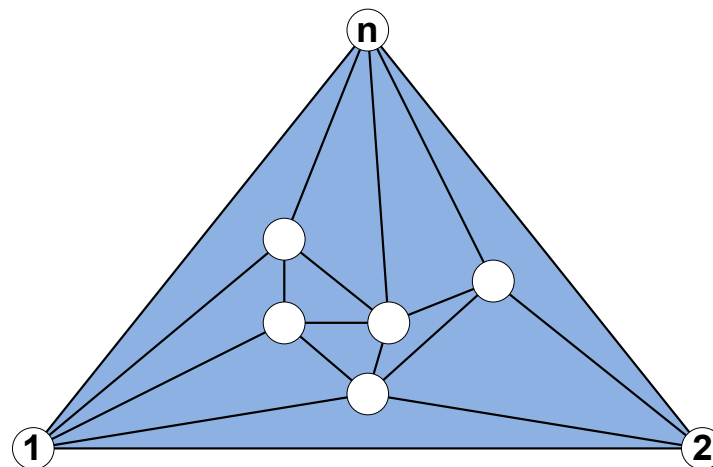
Laufzeit

- Berechnung einer kanonischen Ordnung:
 - Laufzeit für das Finden aller Sehnen von G_{i-1} : $O(n)$
z.B. durch Markierung der Knoten auf der Außenfläche
 - Insgesamt $O(n^2)$
 $O(n)$ mit zusätzlichen Tricks möglich
- Shift-Algorithmus:
 - Laufzeit für Schritt i : $O(n)$ durch Verschieben der Knoten



Laufzeit

- Berechnung einer kanonischen Ordnung:
 - Laufzeit für das Finden aller Sehnen von G_{i-1} : $O(n)$
z.B. durch Markierung der Knoten auf der Außenfläche
 - Insgesamt $O(n^2)$
 $O(n)$ mit zusätzlichen Tricks möglich
- Shift-Algorithmus:
 - Laufzeit für Schritt i : $O(n)$ durch Verschieben der Knoten
 - Insgesamt $O(n^2)$
 $O(n)$ mit zusätzlichen Tricks möglich

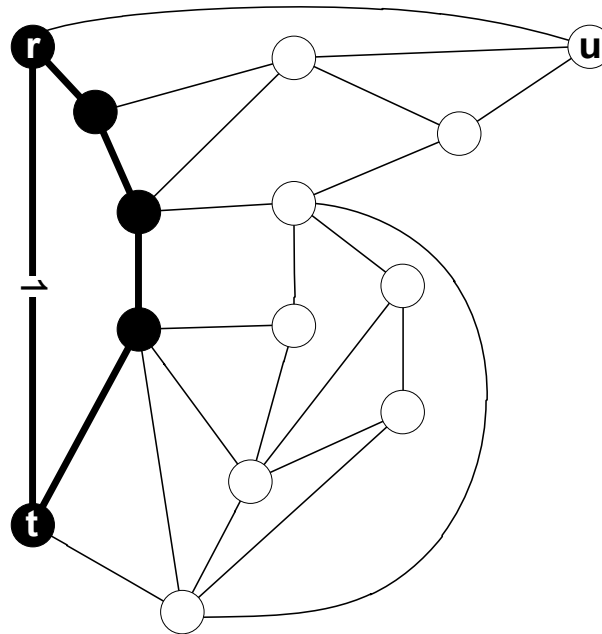


Überblick

- Geradlinige Zeichnungen
 - Kanonische Ordnungen + Shift-Algorithmus
- Erweiterungen durch Ohrendekompositionen
 - Mondschein-Sequenz + Anwendungen

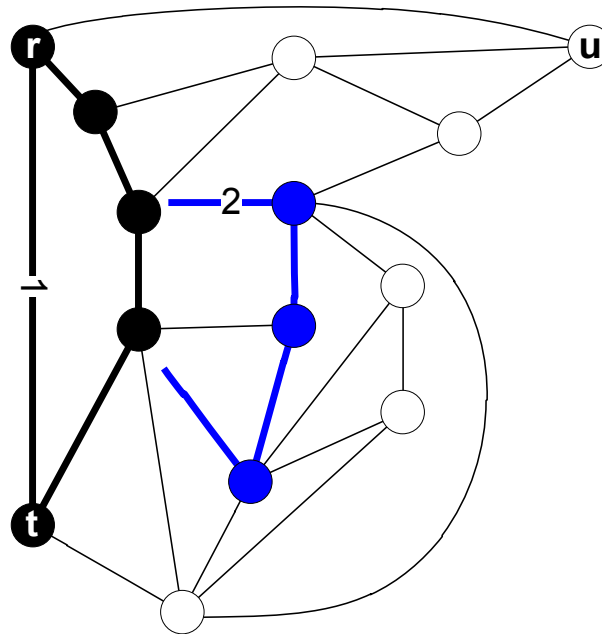
Ohrendekomposition

Ohrendekomposition = geordnete Partition $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$ von E in Kreis C_1 und Pfade C_2, \dots, C_{m-n+1} , so dass sich jedes C_i mit $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ genau in seinen Endknoten schneidet.



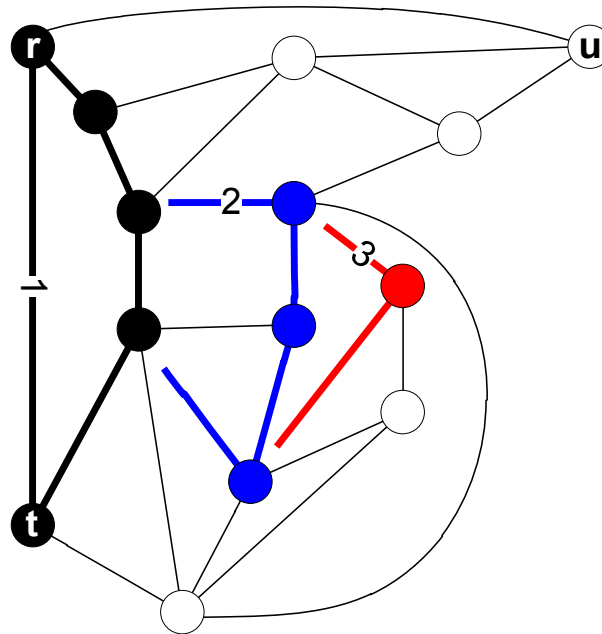
Ohrendekomposition

Ohrendekomposition = geordnete Partition $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$ von E in Kreis C_1 und Pfade C_2, \dots, C_{m-n+1} , so dass sich jedes C_i mit $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ genau in seinen Endknoten schneidet.



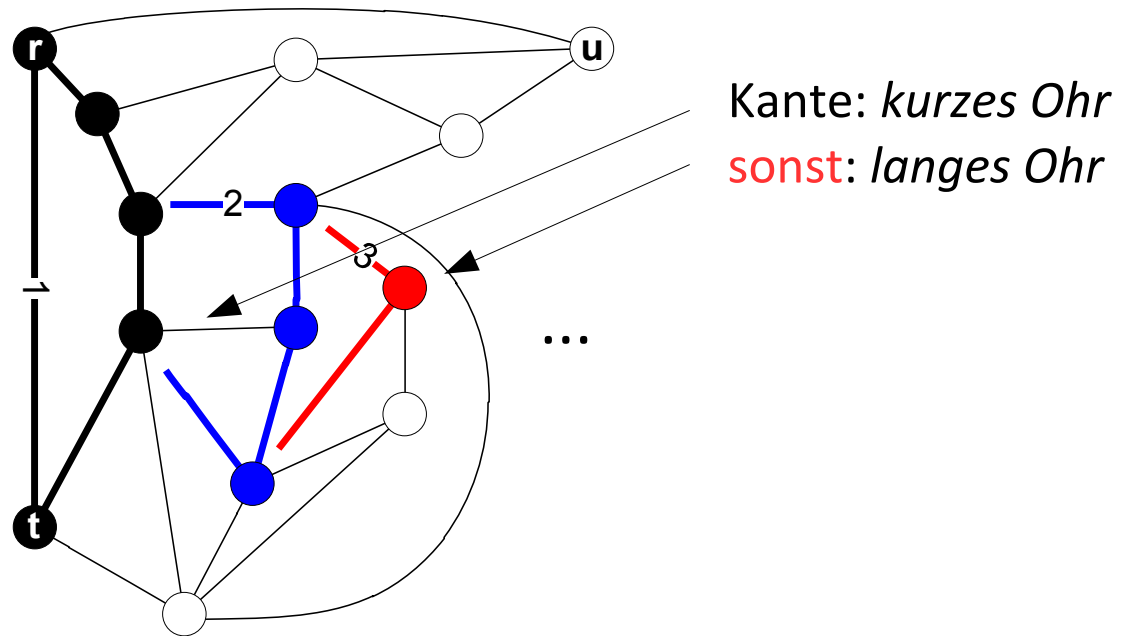
Ohrendekomposition

Ohrendekomposition = geordnete Partition $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$ von E in Kreis C_1 und Pfade C_2, \dots, C_{m-n+1} , so dass sich jedes C_i mit $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ genau in seinen Endknoten schneidet.



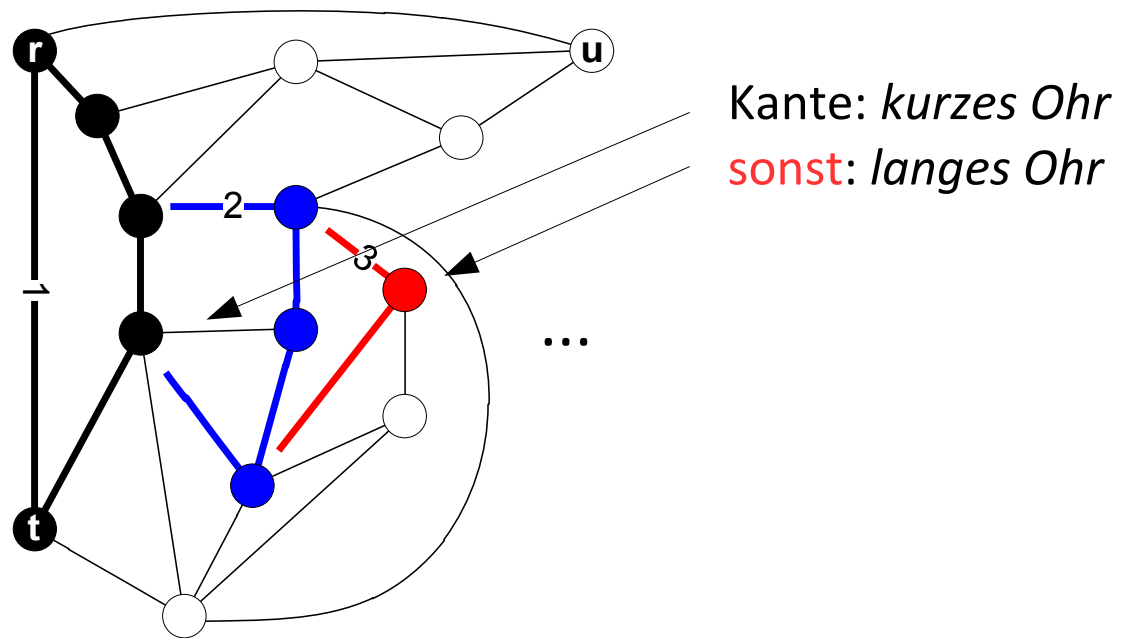
Ohrendekomposition

Ohrendekomposition = geordnete Partition $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$ von E in Kreis C_1 und Pfade C_2, \dots, C_{m-n+1} , so dass sich jedes C_i mit $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ genau in seinen Endknoten schneidet.



Ohrendekomposition

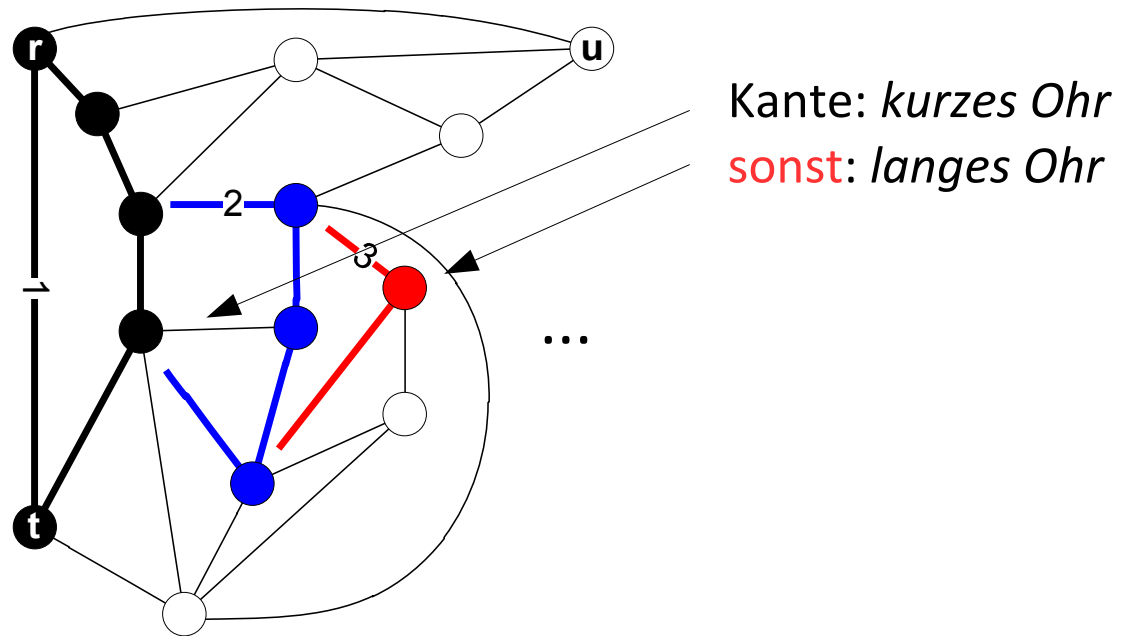
Ohrendekomposition = geordnete Partition $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$ von E in Kreis C_1 und Pfade C_2, \dots, C_{m-n+1} , so dass sich jedes C_i mit $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ genau in seinen Endknoten schneidet.



Thm [Whitney '32]: Ein Graph ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn er eine Ohrendekomposition hat.

Ohrendekomposition

Ohrendekomposition = geordnete Partition $C_1, C_2, \dots, C_{m-n+1}$ von E in Kreis C_1 und Pfade C_2, \dots, C_{m-n+1} , so dass sich jedes C_i mit $C_1 \cup \dots \cup C_{i-1}$ genau in seinen Endknoten schneidet.



Thm [Whitney '32]: Ein Graph ist genau dann 2-zusammenhängend, wenn er eine Ohrendekomposition hat.

nutze für Erweiterungen

Erweiterung auf 3-Zusammenhang

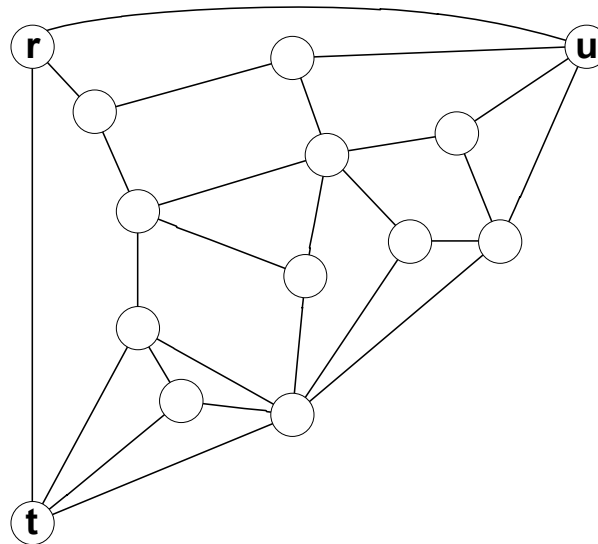
Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

Erweiterung auf 3-Zusammenhang

Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

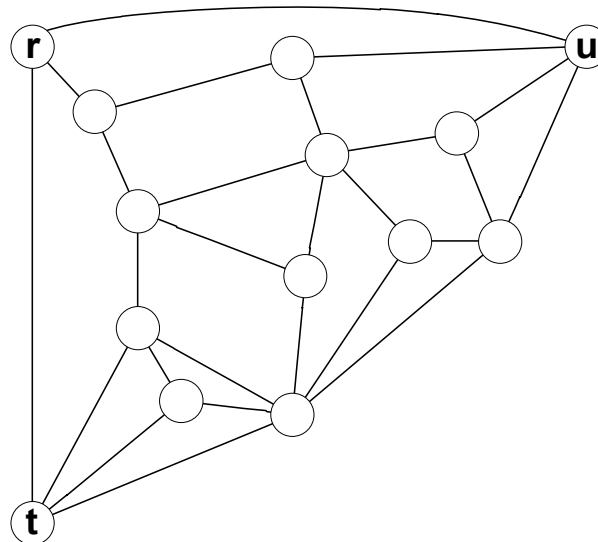


Erweiterung auf 3-Zusammenhang

Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

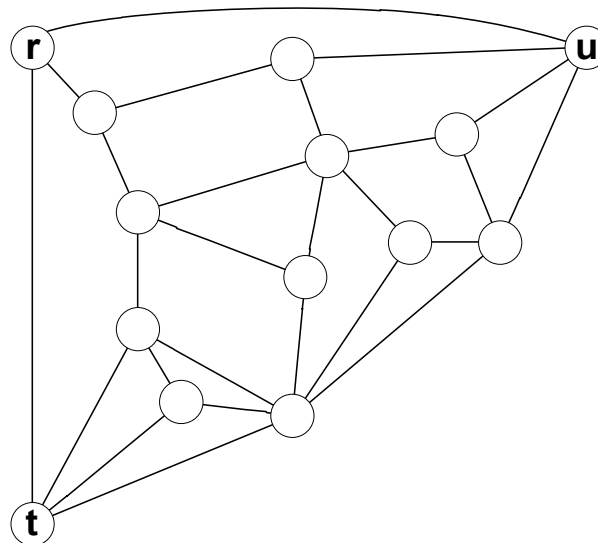
Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und *nach* u ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

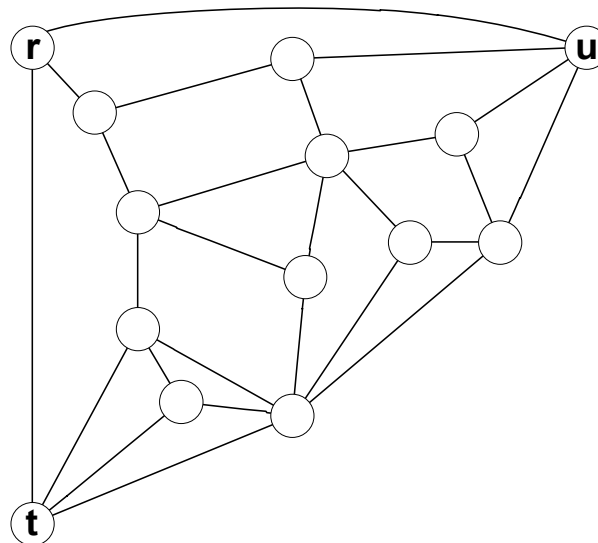
Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und *nach* u ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)

2-Zusammenhang \rightarrow



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

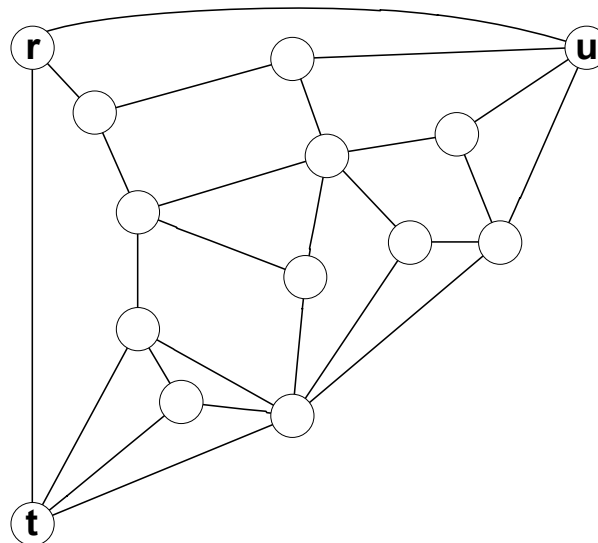
Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und *nach* u ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$ \leftarrow Bedingung für Kante (1,2) \rightarrow 2-Zusammenhang
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

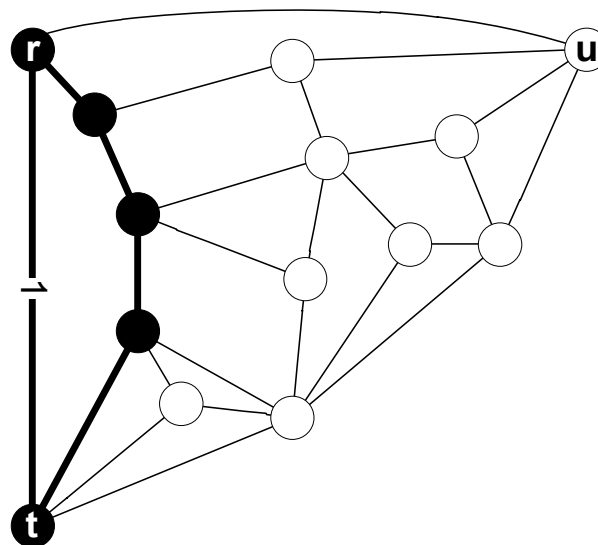
Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und $nach u$ ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$ \leftarrow Bedingung für Kante (1,2) \rightarrow 2-Zusammenhang
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)

non-separating cycle
existiert nach Tutte



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

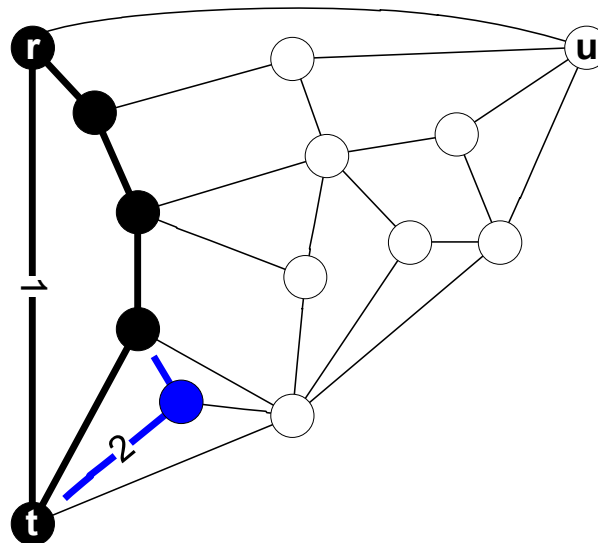
Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und *nach* u ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$ \leftarrow Bedingung für Kante (1,2) \rightarrow 2-Zusammenhang
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

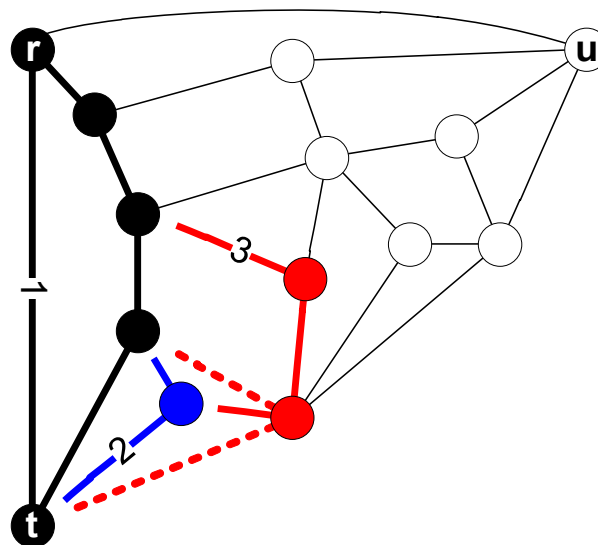
Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und *nach* u ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$ ← **Bedingung für Kante (1,2)** **2-Zusammenhang** →
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

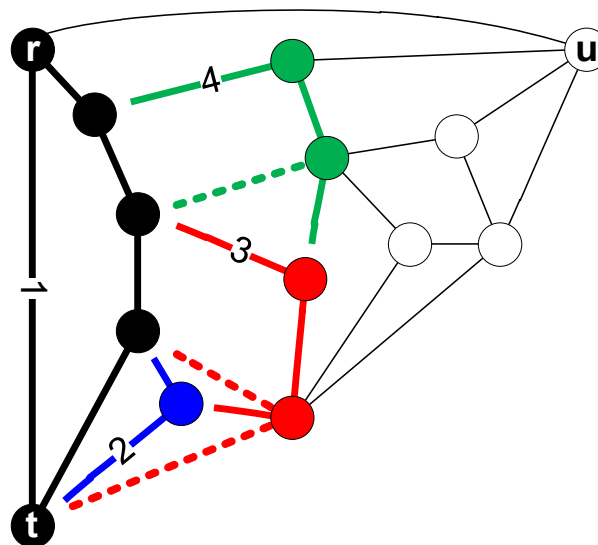
Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und $nach u$ ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$ ← Bedingung für Kante (1,2) → 2-Zusammenhang
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

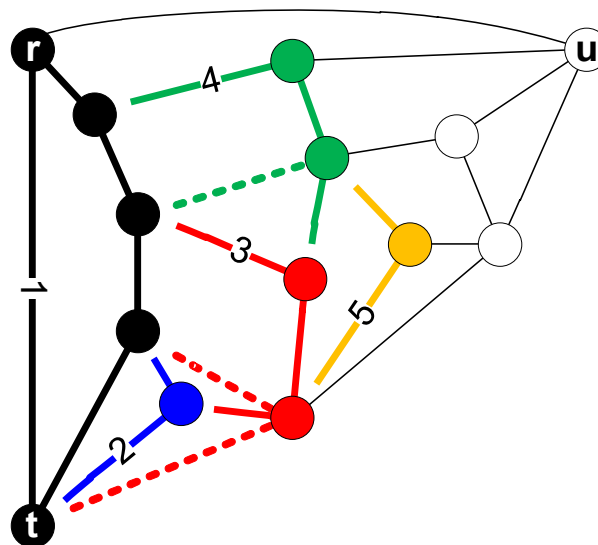
Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und $nach u$ ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$ ← **Bedingung für Kante (1,2)** **2-Zusammenhang** →
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

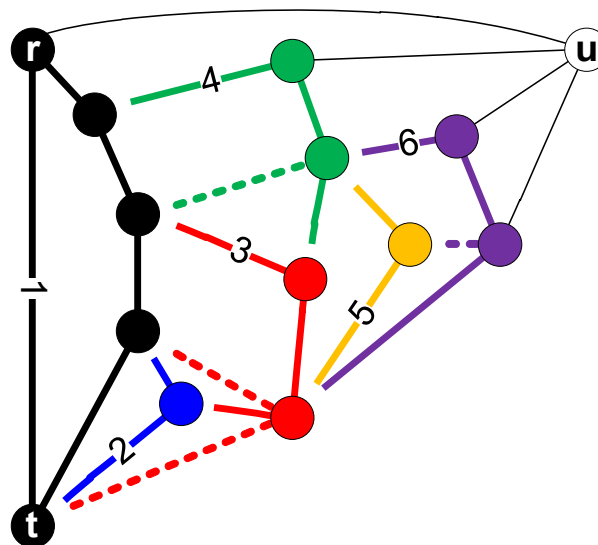
Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und *nach* u ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$ ← Bedingung für Kante (1,2) → 2-Zusammenhang
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

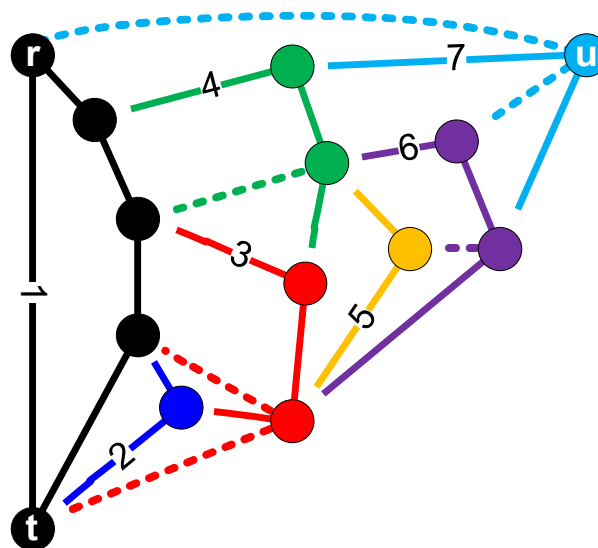
Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und $nach u$ ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$ ← Bedingung für Kante (1,2) → 2-Zusammenhang
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)



Erweiterung auf 3-Zusammenhang

Maximal planare Graphen sind 3-zusammenhängend.

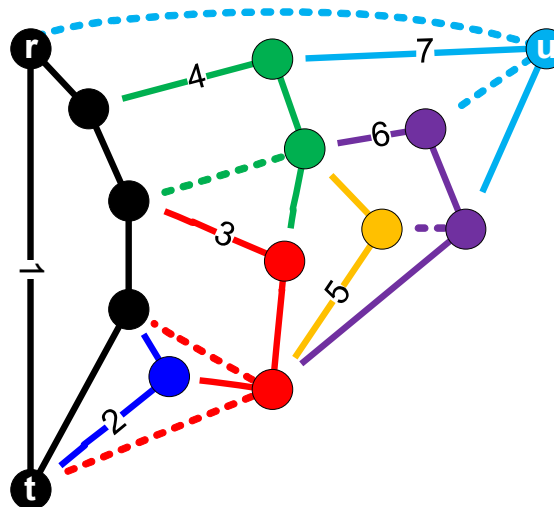
Sei G planar 3-zusammenhängend mit Pfad t - r - u auf der Außenfläche.

- Nachbarn von i in G_{i-1} müssen nicht mehr konsekutiv sein!
- Füge statt Knoten Pfade hinzu \rightarrow Ohrendekomposition!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und *nach* u ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$ \leftarrow Bedingung für Kante (1,2) \rightarrow 2-Zusammenhang
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend* (d.h. $G - V(C_1 \cup \dots \cup C_{i-1})$ ist zusammenhängend $\forall i$)

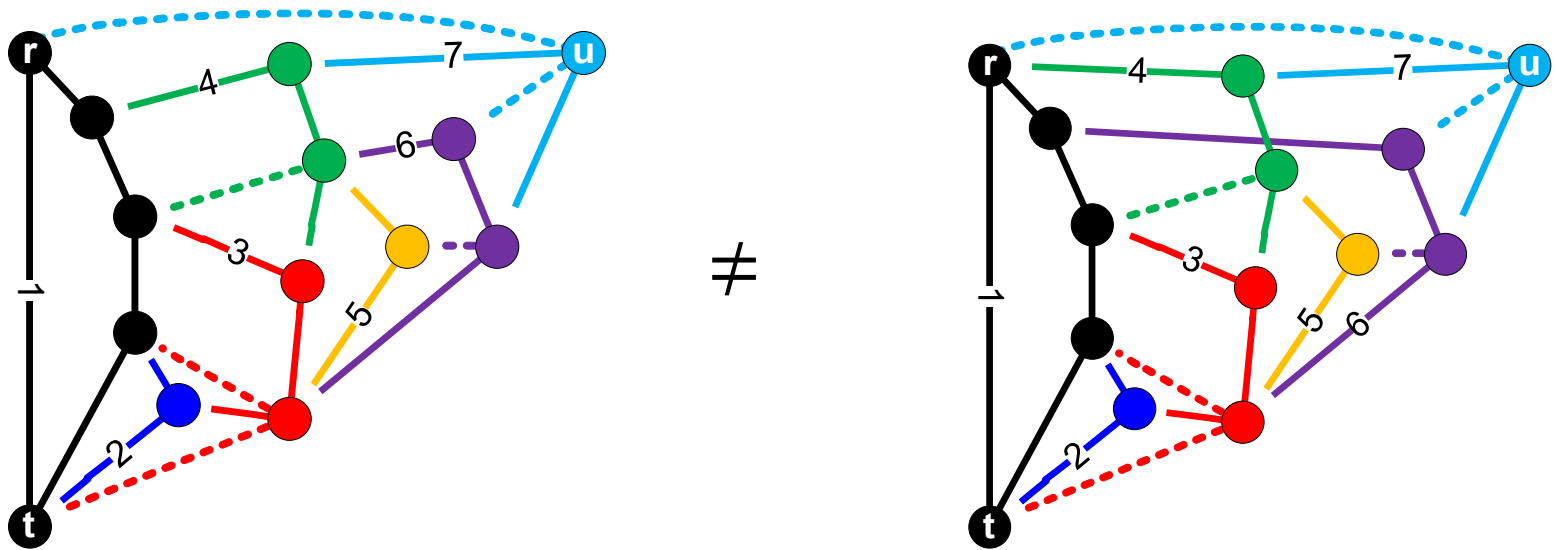
existiert genau für
3-zshng. Graphen



... und nicht-planare Graphen!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und *nach* u ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

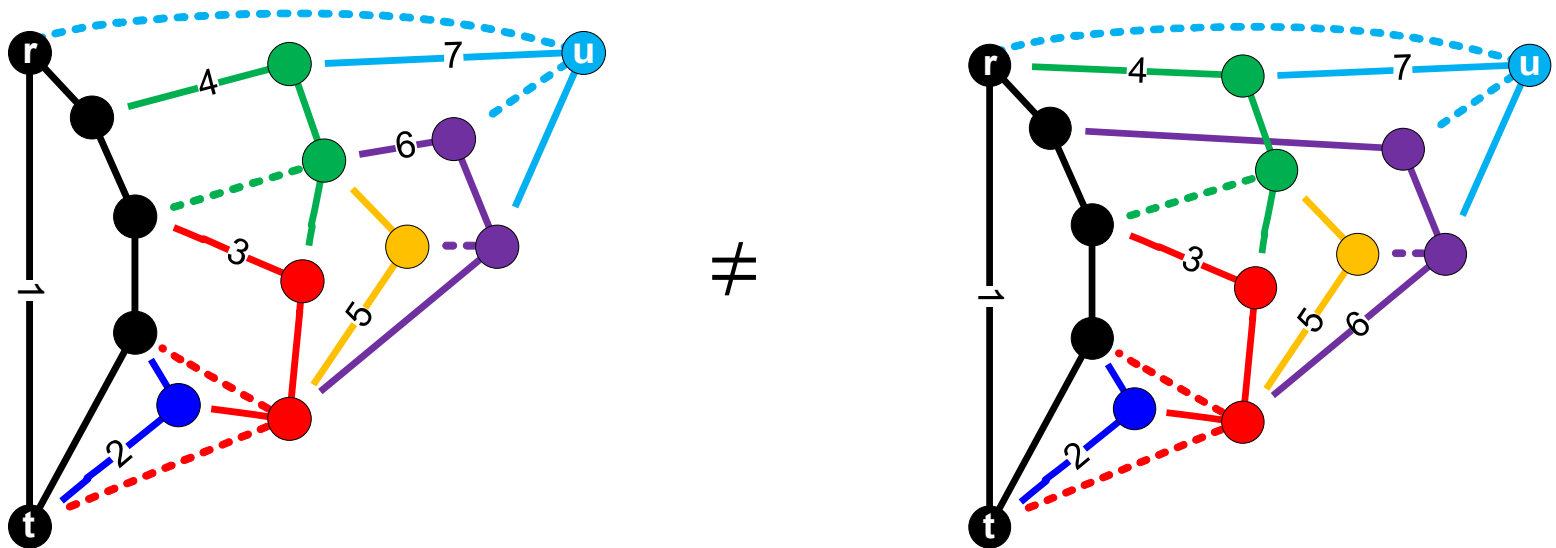
- $rt \in C_1$
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend*



... und nicht-planare Graphen!

Eine *kanonische Ordnung* durch tr und $nach u$ ist eine Ohrendekomposition D für die gilt:

- $rt \in C_1$
- u ist alleiniger innerer Knoten des letzten langen Ohres $C(u)$ und $ru \notin C(u)$
- D ist *nicht-separierend*



Historie

	Planar	
1988 de Fraysseix, Pach, Pollack	Maximal Planar	$O(n \log n)$
1990 Chrobak, Payne	Maximal Planar	$O(n)$
1990 Kant	3-zshng.	$O(n)$
...		

Historie

	Planar	
1988 de Fraysseix, Pach, Pollack	Maximal Planar	$O(n \log n)$
1990 Chrobak, Payne	Maximal Planar	$O(n)$
1990 Kant	3-zshng.	$O(n)$
...		
	General	
1988 Cheriyan, Maheshwari	3-zshng.	$O(nm)$
1989 Itai, Zehavi	3-zshng.	nur Existenz

Historie

	Planar	
1988 de Fraysseix, Pach, Pollack	Maximal Planar	$O(n \log n)$
1990 Chrobak, Payne	Maximal Planar	$O(n)$
1990 Kant	3-zshng.	$O(n)$
...		
	General	
1971 Mondschein	3-zshng.	$O(m^2)$
1988 Cheriyan, Maheshwari	3-zshng.	$O(nm)$
1989 Itai, Zehavi	3-zshng.	nur Existenz

Historie

	Planar	
1988 de Fraysseix, Pach, Pollack	Maximal Planar	$O(n \log n)$
1990 Chrobak, Payne	Maximal Planar	$O(n)$
1990 Kant	3-zshng.	$O(n)$
...		
	General	
1971 Mondschein	3-zshng.	$O(m^2)$
1988 Cheriyan, Maheshwari	3-zshng.	$O(nm)$
1989 Itai, Zehavi	3-zshng.	nur Existenz

Mondschein-Sequenz = 2-1-Sequenz = nicht-separierende Ohrendekomposition © 11.09.16

Historie

	Planar	
1988 de Fraysseix, Pach, Pollack	Maximal Planar	$O(n \log n)$
1990 Chrobak, Payne	Maximal Planar	$O(n)$
1990 Kant	3-zshng.	$O(n)$
...		
	PhD-Thesis am MIT (insgesamt 1mal referenziert)	
	General	
1971 Mondschein	3-zshng.	$O(m^2)$
1988 Cheriyan, Maheshwari	3-zshng.	$O(nm)$
1989 Itai, Zehavi	3-zshng.	nur Existenz

Mondschein-Sequenz = 2-1-Sequenz = nicht-separierende Ohrendekomposition © 11.09.16

Historie

	Planar	
1988 de Fraysseix, Pach, Pollack	Maximal Planar	$O(n \log n)$
1990 Chrobak, Payne	Maximal Planar	$O(n)$
1990 Kant	3-zshng.	$O(n)$
...		

PhD-Thesis am MIT (insgesamt 1mal referenziert)

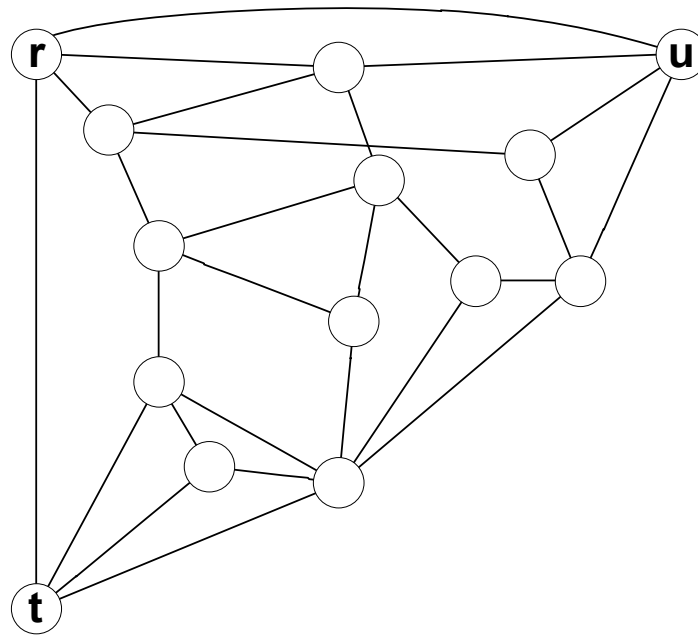


	General	
1971 Mondschein	3-zshng.	$O(m^2)$
1988 Cheriyan, Maheshwari	3-zshng.	$O(nm)$
1989 Itai, Zehavi	3-zshng.	nur Existenz
2014 S.	3-zshng.	$O(m)$

Mondschein-Sequenz = 2-1-Sequenz = nicht-separierende Ohrendekomposition © 11.09.16

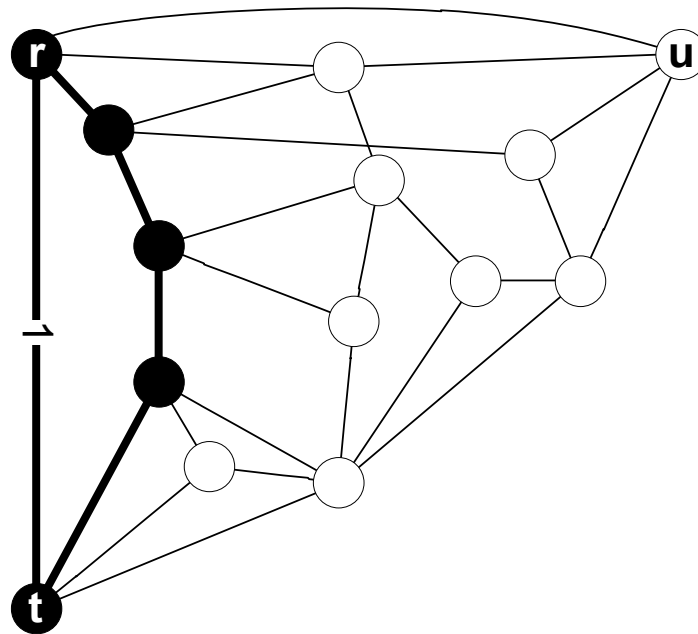
Anwendungen

Anwendung 1: Planaritätstest (in Linearzeit)



Anwendungen

Anwendung 1: Planaritätstest (in Linearzeit)



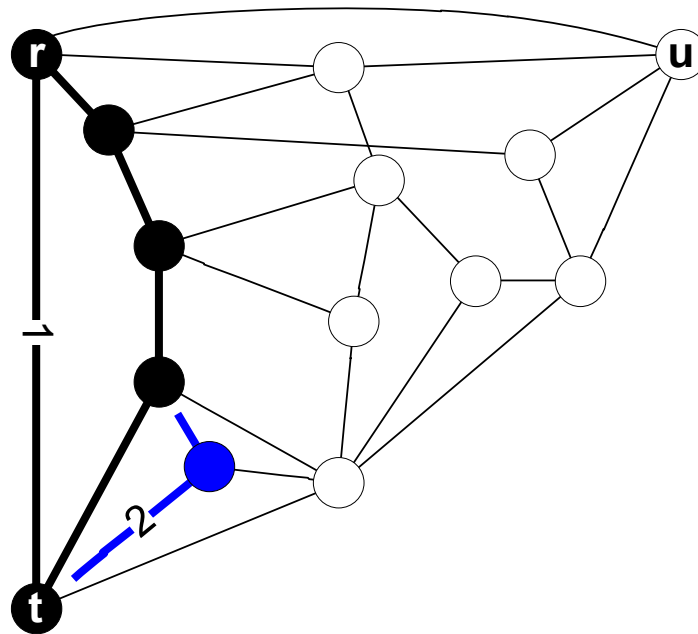
Sei die Außenfläche links der Kante (r,u) .

Wenn G planar ist,

- ist C_1 Fläche nach Satz von Tutte.

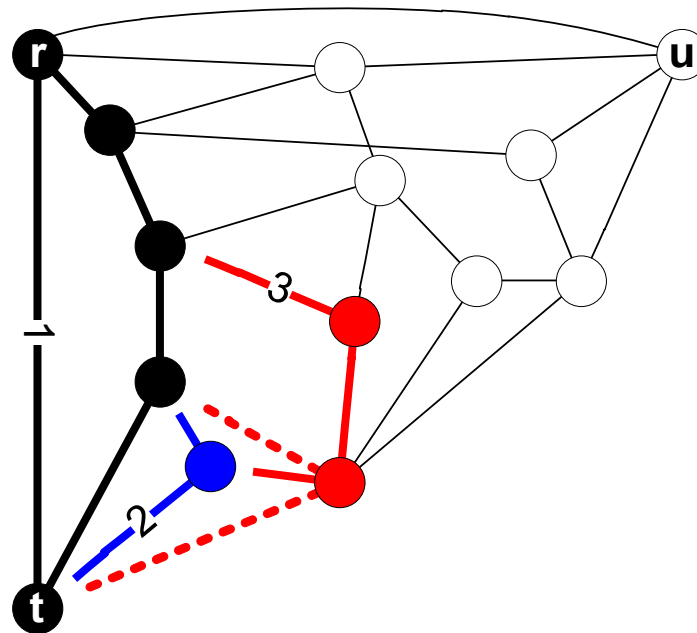
Anwendungen

Anwendung 1: Planaritätstest (in Linearzeit)



Anwendungen

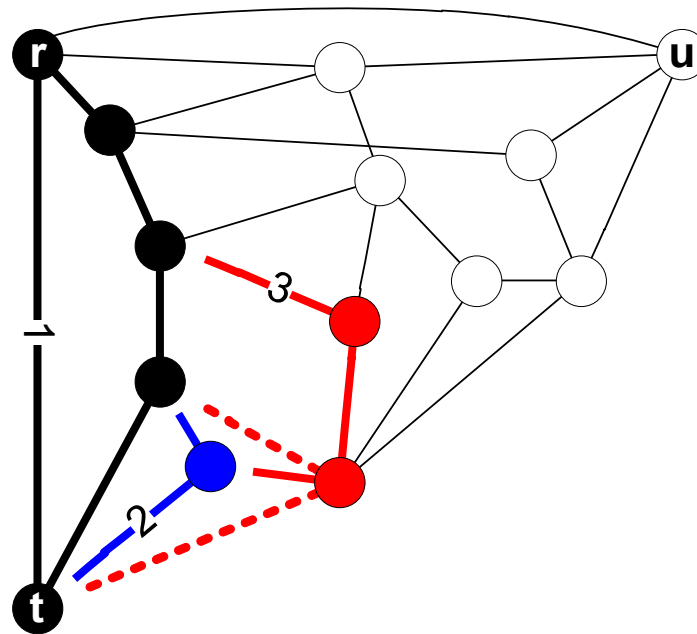
Anwendung 1: Planaritätstest (in Linearzeit)



- Alle inneren Knoten des nächsten Ohres müssen in die Außenfläche!
(sonst erzeugt die Nicht-Separiertheit von D eine Kreuzung)

Anwendungen

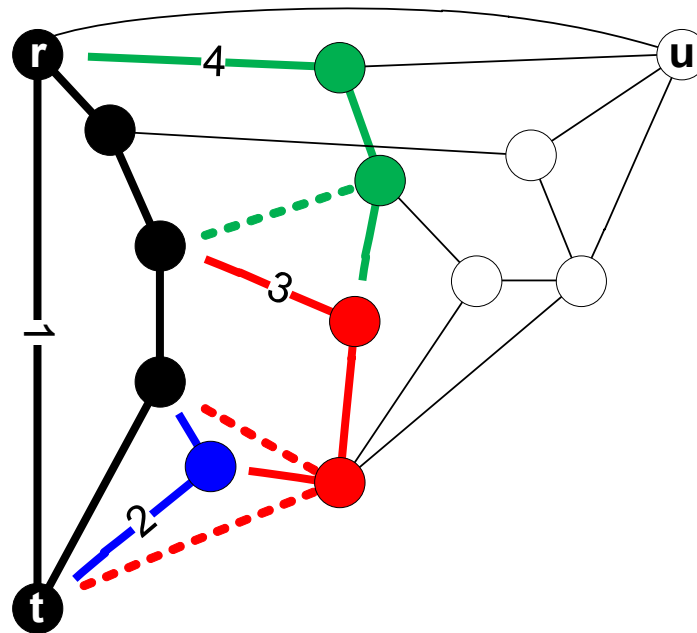
Anwendung 1: Planaritätstest (in Linearzeit)



- Alle inneren Knoten des nächsten Ohres müssen in die Außenfläche!
(sonst erzeugt die Nicht-Separiertheit von D eine Kreuzung)
- Nachbarn des Ohres müssen also konsekutiv auf Außenfläche liegen.

Anwendungen

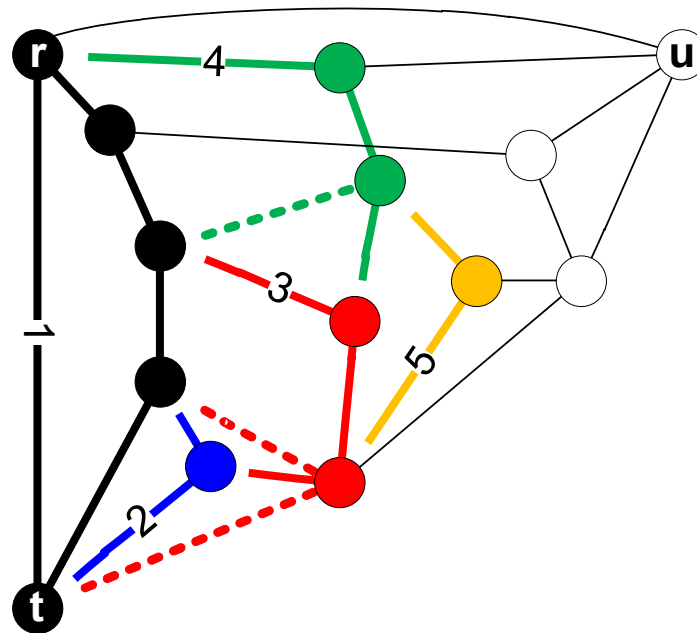
Anwendung 1: Planaritätstest (in Linearzeit)



- Alle inneren Knoten des nächsten Ohres müssen in die Außenfläche!
(sonst erzeugt die Nicht-Separiertheit von D eine Kreuzung)
- Nachbarn des Ohres müssen also konsekutiv auf Außenfläche liegen.

Anwendungen

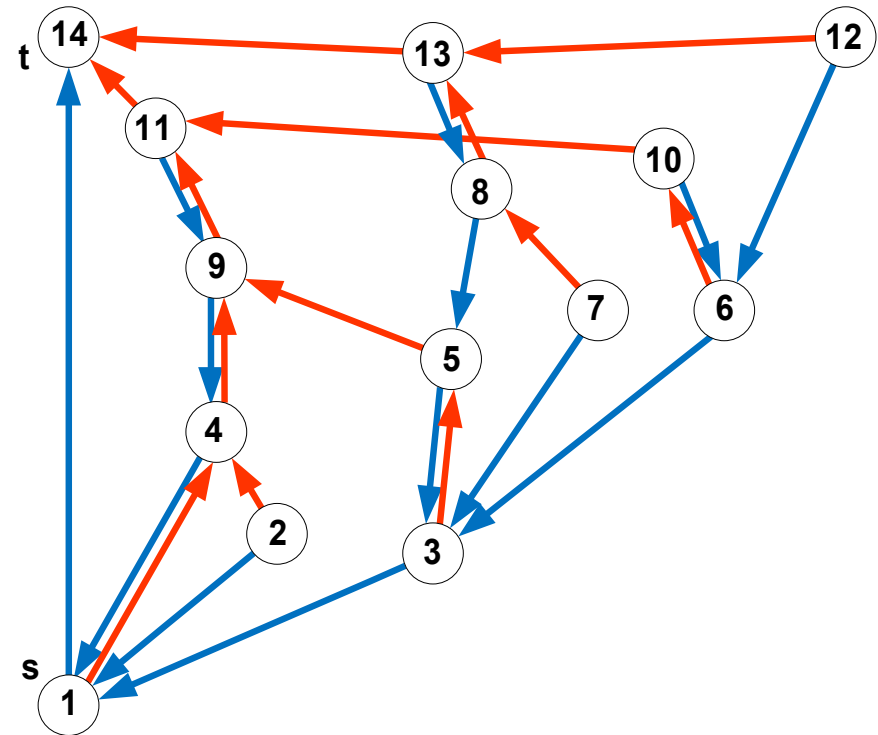
Anwendung 1: Planaritätstest (in Linearzeit)



- Alle inneren Knoten des nächsten Ohres müssen in die Außenfläche!
(sonst erzeugt die Nicht-Separiertheit von D eine Kreuzung)
- Nachbarn des Ohres müssen also konsekutiv auf Außenfläche liegen.

Anwendungen

Anwendung 2: Unabhängige Spannbäume

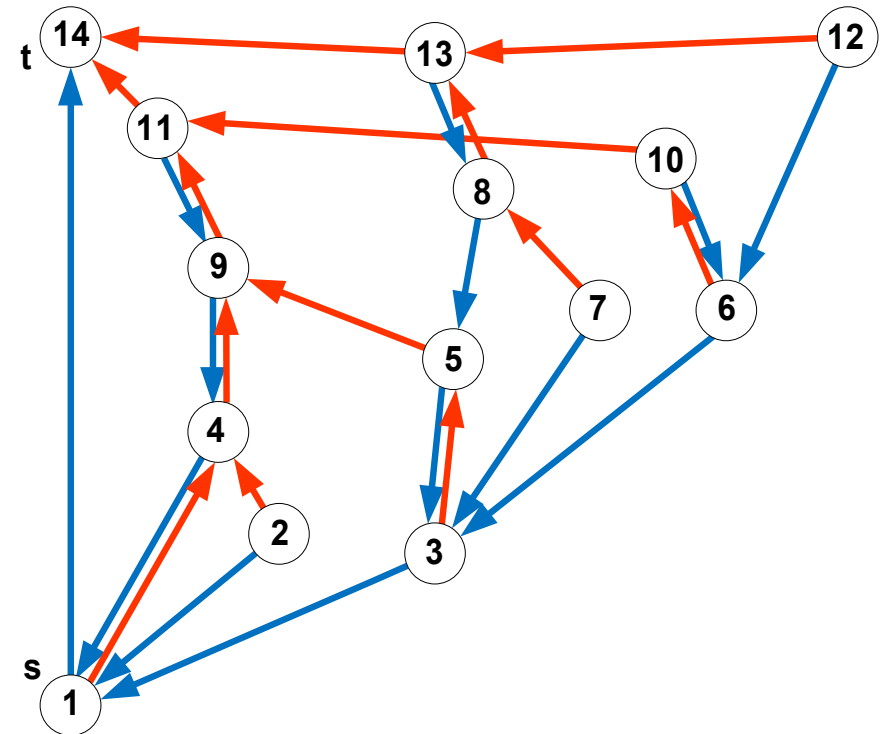


Anwendungen

Anwendung 2: Unabhängige Spannbäume

[**Vermutung von Itai und Rodeh '89**]

Enthält jeder k -zusammenhängende Graph k unabhängige Spannbäume?

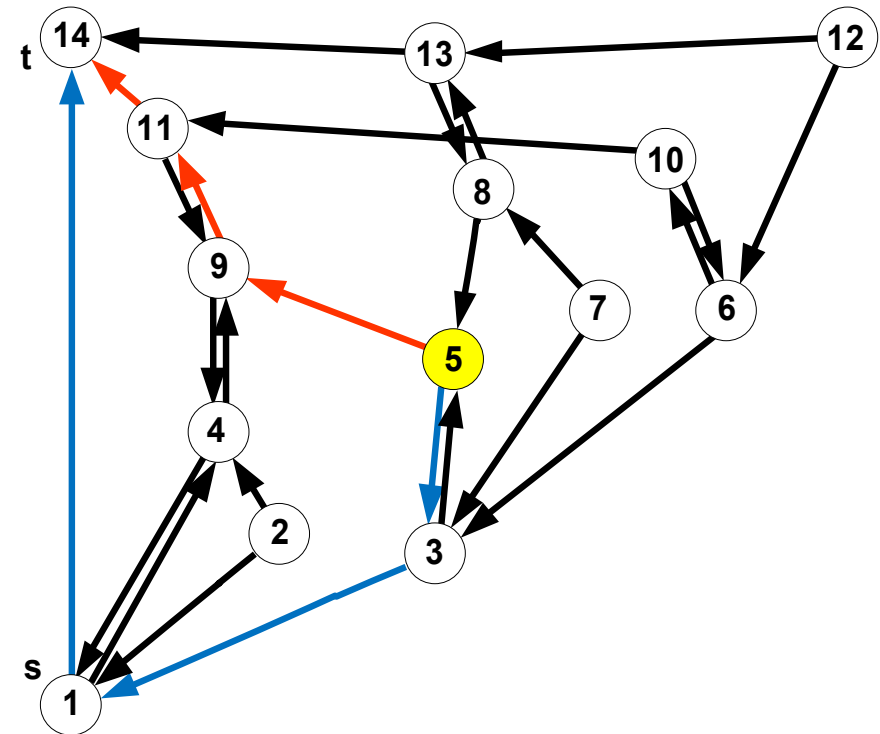


Anwendungen

Anwendung 2: Unabhängige Spannbäume

[**Vermutung von Itai und Rodeh '89**]

Enthält jeder k -zusammenhängende Graph k unabhängige Spannbäume?



Anwendungen

Anwendung 2: Unabhängige Spannbäume

[**Vermutung von Itai und Rodeh '89**]

Enthält jeder k -zusammenhängende Graph k unabhängige Spannbäume?

Historie:

$k=1$: Spannbaum

$k=2$: [Itai, Rodeh '84] st-Numbering

$k=3$: [S. '13] Mondshein-Sequenz

$k=4$: [Curran, Lee, Yu '06]

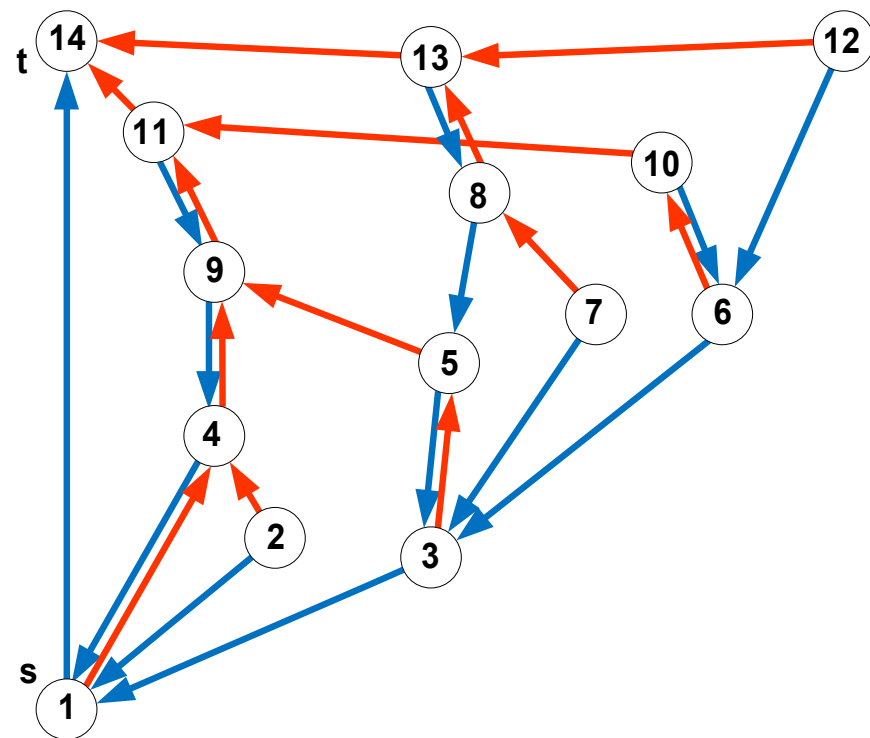
$k>4$: [**OFFEN**] sogar Existenz...

$O(m)$

$O(m)$

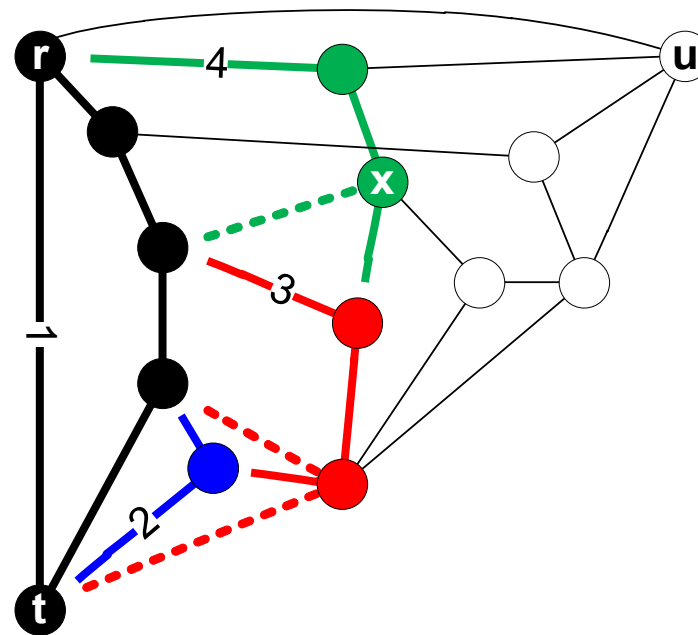
$O(m)$

$O(m^3)$



Anwendungen

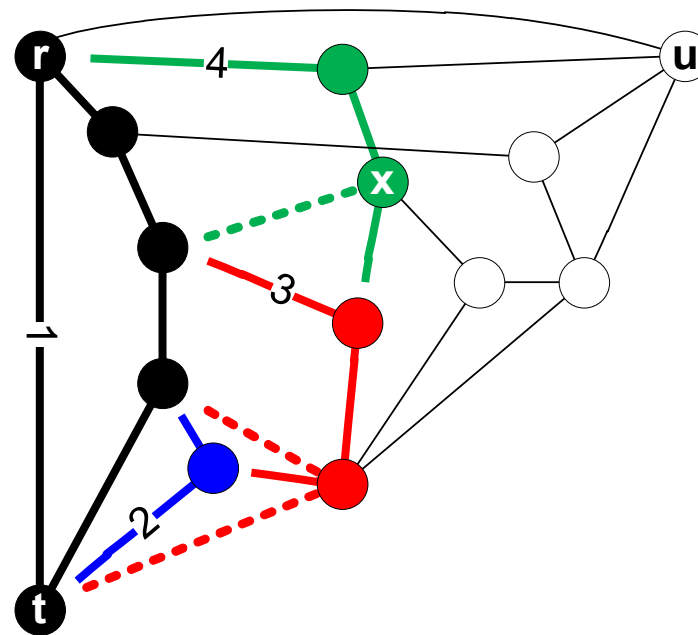
3 unabhängige Spannbäume:



Anwendungen

3 unabhängige Spann bäume:

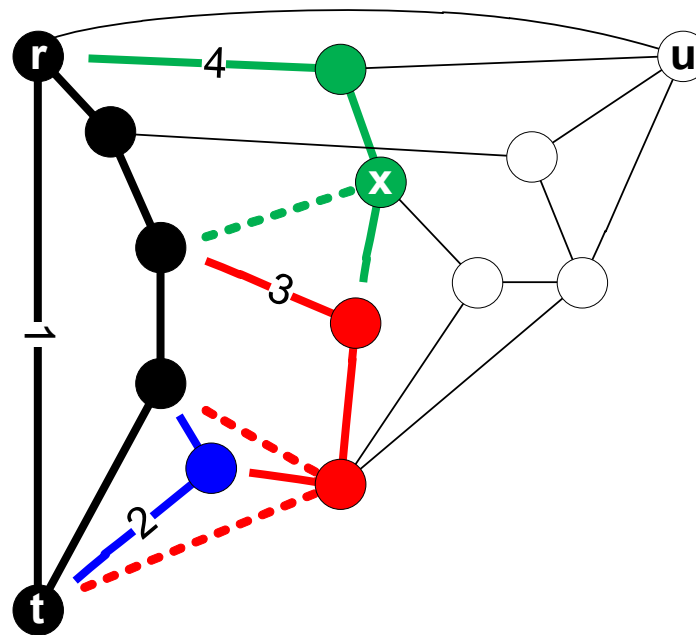
- Nehme r als Wurzel
- Betrachte den Graph nachdem Knoten x hinzugefügt wurde.



Anwendungen

3 unabhängige Spann­bäume:

- Nehme r als Wurzel
- Betrachte den Graph nachdem Knoten x hinzugefügt wurde.



- **Ohrenzerlegung** ergibt 2 unabhängige Pfade von x nach r
- **Nicht-Separiertheit** ergibt 1 weiteren Pfad von x nach r (jedes x ist zu den verbleibenden Knoten benachbart)
- **Konsistente st-Numerierung** ergibt 3 unabhängige Spann­bäume

Anwendungen

3 unabhängige Spannbäume:

